٢٢/١٢/٢٠١٣ السادسة عشرة.

22/12/2013 المحاضرة السادسة عشرة.

- ليكن V، W فضائين شعاعيين منتهيي البعد على حقل F وبعد كل منهما n، m على الترتيب و A و B قاعدتين مرتبتين لـ V، W على الترتيب وليكن $L: V \longrightarrow W$ تطبيق خطي و $\mathcal{L}(V,W)$ مجموعة كل التطبيقات الخطية التي منطلقها V ومستقرها W.

(أ) أن ما يسمى مصفوفة وحيدة H بالنسبة لـ A، B.

(ب) أن $H \in M_{m\times n}(F)$ تعين تطبيق خطي وحيد أي:

$f: \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow M_{m\times n}(F)$ تقابل (تشاكل تقابلي)

$\forall L \in \mathcal{L}(V,W): f(L) = H \in M_{m\times n}(F)$

مثال: ليكن $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ تطبيق خطي مصفوفته بالنسبة للقاعدتين القانونيتين لـ $\mathbb{R}^3$، $\mathbb{R}^4$: $E=\{e_1,e_2,e_3\}\subseteq\mathbb{R}^3$، $E'=\{e'_1,e'_2,e'_3,e'_4\}\subseteq\mathbb{R}^4$ هي:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

أوجد قاعدة اقتران أو قاعدة ربط (L)

الحل:

$\forall v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: v=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3$

$(x,y,z)=\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(0,1,0)+\lambda_3(0,0,1)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$

$L(x,y,z)=L(xe_1+ye_2+ze_3)=xL(e_1)+yL(e_2)+zL(e_3)$

ولكن:

$$L(e_1)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow L(e_1)=(1,0,4,2)$$

$$L(e_2)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L(e_2)=(-1,-1,0,1)$$

$$L(e_3)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow L(e_3)=(2,0,1,-1)$$

$L(x,y,z) = x(1,0,4,2) + y(-1,-1,0,1) + z(2,0,1,-1)$
$= (x-y+2z, -y, 4x+z, 2x+y-z)$

أو

$$L(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x-y+2z, -y, 4x+z, 2x+y-z)$$

ملاحظة الطريقة الثانية لا تستخدم إلا إذا كانت القواعد قانونية

مبرهنة ① إذا كان $L: V \longrightarrow W$ تطبيق خطي وموضوعه H بالنسبة للقاعدتين فإن H مصفوفة

$rank(L) = rank(H)$

② إذا كان $L: V \longrightarrow W$ و $T: W \longrightarrow X$ تطبيقين خطيين و H_1 و H_2 موضوعي L و T على الترتيب بالنسبة للقواعد $A \subset V$ ، $B \subseteq W$ ، $C \subseteq X$ فإن موضوعة

③ $T \circ L : V \longrightarrow X$: $H = H_2 \cdot H_1$

مثال: ليكن $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$L(x,y,z) = (x-y, y-z)$

$L: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$L(x,y,z,t) = (x+y, y+z, z+t)$

تطبيقين خطيين

①: أوجد H_1 و H_2 موضوعي L و T على الترتيب بالنسبة للقواعد القانونية

②: أوجد H موضوعة $L \circ T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ وتحقق أنه

$H = H_1 \cdot H_2$

الحل: ليكن $E = \{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ، $E' = \{e'_1, e'_2, e'_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$E'' = \{e''_1, e''_2, e''_3, e''_4\} \subseteq \mathbb{R}^4$

①: لحساب H_1, H_2 نجد أن:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

②

$H = H_1 \cdot H_2$

$$(L\circ T)(x,y,z,t) = L(T(x,y,z,t)) = L(x+y,\ y+z,\ t+z)$$
$$= L((x+y)-(y+z),\ (y+z)-(t+z)) = (x-z,\ y-t)$$

$$(L\circ T)(e_1'') = (L\circ T)(1,0,0,0) = (1,0) = e_1 + 0e_2$$
$$(L\circ T)(e_2'') = (L\circ T)(0,1,0,0) = (0,1) = 0e_1 + e_2$$
$$(L\circ T)(e_3'') = (L\circ T)(0,0,1,0) = (-1,0) = -e_1 + 0e_2$$
$$(L\circ T)(e_4'') = (L\circ T)(0,0,0,1) = (0,-1) = 0e_1 - e_2$$

ومنه
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

التحقق:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = H$$

انتهت المحاضرة.

٢٤/١٢/٢٠١٢ المحاضرة السابعة عشرة.

ملاحظة:

اذا كان $L: V \to W$ تطبيقاً خطياً و $\dim W = \dim V$ فإن

①: L متقابل إذا وفقط إذا كانت H مصفوفته بالنسبة للقاعدتين الرتيبتين قابلة للقلب.

②: اذا كان L متقابل فإن التطبيق العكسي $L^{-1}: W \to V$ يكون له مصفوفة H^{-1}.

مثال:

ليكن $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تأثيراً خطياً
$$L(x,y,z) = (x+y+z,\ x+z,\ y+z)$$

① هل L متقابل؟ ② اذا كان L متقابل أوجد التطبيق العكسي L^{-1}.

الحل: نوجد H مصفوفته بالنسبة للقاعدة القانونية $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$\left.\begin{aligned} L(e_1) &= L(1,1,0) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3 \\ L(e_2) &= L(1,0,1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 \\ L(e_3) &= L(1,1,1) = 1e_2 + 1e_2 + 1e_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$