# الجداء والمجموع المباشر للزمر

تعريف : ليكن $G_1, G_2$ زمرتين , نسمي المجموعة :

$$G_1 \times G_2 = \{ (g_1, g_2) \ ; g_1 \in G_1 \ , \ g_2 \in G_2 \}$$

الجداء المباشر ( الخارجي ) للزمرتين $G_1, G_2$ والذي سنرمز له بـ $G_1 \oplus G_2$
إنّ $(e_1, e_2) \in G_1 \oplus G_2$ بحيث $e_1$ محايد $G_1$ و $e_2$ محايد $G_2$ .

تمهيدية : ليكن $G_1, G_2$ زمرتين لنعرف على المجموعة $G_1 \oplus G_2$ عملية بالشكل :

$$\forall \ (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G_1 \oplus G_2 \ ; \ \ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$$

عندئذٍ الثنائية $(G_1 \oplus G_2, \cdot)$ تشكل زمرة الحيادي فيها هو $(e_1, e_2)$ ومقلوب كل عنصر على النحو التالي

$$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$$

نسمي الزمرة $G_1 \oplus G_2$ زمرة الجداء المباشر للزمرتين $G_1, G_2$ .

مثال : أوجد زمرة الجداء المباشر للزمرتين $\mathbb{Z}_3, U(10)$

$$U(10) = \{ 1,3,7,9 \} \quad , \quad \mathbb{Z}_3 \{ 0,1,2 \}$$

$$U(10) \oplus \mathbb{Z}_3 = \{ (1,0), (1,1), (1,2), (3,0), (3,1), (3,2),$$

$$(7,0), (7,1), (7,2), (9,0), (9,1), (9,2) \}$$

$$(3,1) \cdot (7,2) = (3 \otimes 7, 1 \oplus 2) = (1,0) \in U(10) \oplus \mathbb{Z}_3$$

$$(7,1)^{-1} = (7^{-1}, 1^{-1}) = (3,2) \in U(10) \oplus \mathbb{Z}_3$$

مبرهنة : ليكن $G_1, G_2$ زمرتين وليكن $e_1, e_2$ حياديهما على الترتيب
ولنأخذ زمرتي الجداء المباشر $G_1 \oplus G_2$ و $G_2 \oplus G_1$ عندئذٍ :

1 - $G_1 \oplus G_2 \cong G_2 \oplus G_1$
2 - $\mathbb{Z}(G_1 \oplus G_2) = \mathbb{Z}(G_1) \oplus \mathbb{Z}(G_2)$
3 - كلاً من $G_1 \oplus \langle e_2 \rangle$ و $\langle e_1 \rangle \oplus G_2$ زمرة جزئية في $G_1 \oplus G_2$
4 - $G_2 \cong \langle e_1 \rangle \oplus G_2$ و $G_1 \cong G_1 \oplus \langle e_2 \rangle$
5 - الزمرة $G_1 \oplus G_2$ تبديلية عندما وفقط عندما تكون الزمرتين $G_1, G_2$ تبديليتين .

الإثبات : 1 - لنعرف العلاقة $f: G_1 \oplus G_2 \longrightarrow G_2 \oplus G_1$

$$\forall\ (x,y) \in G_1 \oplus G_2\ ;\quad f\big((x,y)\big) = (y,x)$$

فنجد أنّ $f$ تطبيق متباين :

$$\forall\ (x,y),(x_1,y_1) \in G_1 \oplus G_2$$

$$(x,y) = (x_1,y_1) \Leftrightarrow x = x_1, y = y_1 \Leftrightarrow (y,x) = (y_1,x_1) \Leftrightarrow f\big((x,y)\big) = f\big((x_1,y_1)\big)$$

كذلك إنّ $f$ غامر , لنبرهن أنه تشاكل :

$$f[(x,y)(x_1,y_1)] = f[(xx_1,yy_1)] = (yy_1,xx_1) = (y,x)(y_1,x_1) = f(x,y)f(x_1,y_1)$$

ومنه $f$ تشاكل , ومما سبق يكون $f$ تماثل أي إنّ $G_1 \oplus G_2 \cong G_2 \oplus G_1$

2 - ليكن $(a,b) \in \mathbb{Z}(G_1 \oplus G_2)$ عندئذٍ :

$$\forall\ x \in G_1\ ,\ y \in G_2\ ;\ (x,y) \in G_1 \oplus G_2 \Longrightarrow (a,b)(x,y) = (ax,by) = (xa,yb)$$

$$\Longrightarrow xa = ax\ \wedge\ yb = by \Longrightarrow a \in \mathbb{Z}(G_1)\ ,\ b \in \mathbb{Z}(G_2) \Longrightarrow (a,b) \in \mathbb{Z}(G_1) \oplus \mathbb{Z}(G_2)$$

وبالتالي يكون $\mathbb{Z}(G_1 \oplus G_2) \subseteq \mathbb{Z}(G_1) \oplus \mathbb{Z}(G_2)$
ليكن $(c,d) \in \mathbb{Z}(G_1) \oplus \mathbb{Z}(G_2)$ عندئذٍ ليكن $(x,y) \in G_1 \oplus G_2$

$$\Longrightarrow (x,y)(c,d) = (xc,yd) = (cx,dy) = (c,d)(x,y) \Longrightarrow (c,d) \in \mathbb{Z}(G_1 \oplus G_2)$$

ومنه فإنّ $\mathbb{Z}(G_1) \oplus \mathbb{Z}(G_1) \subseteq \mathbb{Z}(G_1 \oplus G_2)$ ومن الاحتوائين يكون $\mathbb{Z}(G_1 \oplus G_2) = \mathbb{Z}(G_1) \oplus \mathbb{Z}(G_2)$

3 - $G_1 \oplus \langle e_2 \rangle \subseteq G_1 \oplus G_2$ و $(e_1,e_2) \in G_1 \oplus \langle e_2 \rangle$ ومنه فإنّ $G_1 \oplus \langle e_2 \rangle \neq \emptyset$
ليكن $(a,e_2),(b,e_2) \in G_1 \oplus \langle e_2 \rangle$ :

$$(a,e_2)(b,e_2)^{-1} = (a,e_2)(b^{-1},e_2) = (ab^{-1},e_2) \in G_1 \oplus \langle e_2 \rangle \Longrightarrow G_1 \oplus G_2 \text{ جزئية في } G_1 \oplus \langle e_2 \rangle$$

مبرهنة : ليكن $G_1, G_2$ زمر منتهية , $(a,b) \in G_1 \oplus G_2$ عندئذٍ :

$$0(a,b) = Icm\big(0(a),0(b)\big)$$

الإثبات : لنفرض أنّ $0(a)=n$ , $0(b)=m$ و $0(a,b)=s$

$$\left.\begin{aligned}(a,b)^s&=(e_1,e_2)\\(a,b)^s&=(a^s,b^s)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow a^s=e_1\ ,\qquad b^s=e_2$$

ومنه نجد أنّ $n,m$ يقسمان $s$ لأنهما مراتب لـ $a,b$ وهكذا يكون $s$ مضاعف مشترك للعددين $n,m$

لنفرض أنّ $t=Icm(n,m)$ عندئذٍ $t\le s$

بما أنّ $t$ مضاعف لـ $n,m$ فيوجد $\alpha,\lambda\in\mathbb{Z}$ بحيث :

$$t=\beta n\quad ,\quad t=\lambda b$$

ومنه :

$$(a,b)^t=(a^t,b^t)=\left(a^{\beta n},b^{\lambda b}\right)=\left((a^n)^\beta,(b^m)^\lambda\right)=(e_1,e_2)$$

وبما أنّ $s$ مرتبة $(a,b)$ يكون $s\le t$ وبالتالي $t=s$ ومنه $0(a,b)=Icm\big(0(a),0(b)\big)$

مبرهنة : ليكن $H,K$ زمر دوارة منتهية .. إنّ الشرط اللازم والكافي لكي تكون الزمرة $H\oplus K$ دوارة هو أن تكون مرتبة كل من $K$ و $H$ عددين أوليين فيما بينهما .

الإثبات : لنفرض أنّ $K=\langle t\rangle$ حيث $t\in K$ , $H=\langle h\rangle$ حيث $h\in H$
ولنفرض أيضاً :

$$n=(K:1)\ ,\ m=(H:1)\Longrightarrow(H\oplus K:1)=n\cdot m$$

" $\Longleftarrow$ " لنفرض أنّ $H\oplus K$ زمرة دوارة , ولنفرض جدلاً أنّ $gcd(n,m)=d>1$

$$\left(h^{\frac{m}{d}}\right)^d=h^m=e\Longrightarrow H\oplus K \text{ زمرة جزئية في } \left\langle\left(h^{\frac{m}{d}}\right),e_K\right\rangle$$

$$\left(h^{\frac{m}{d}},e_K\right)^d=\left(h^{\frac{md}{d}},e_K^{\frac{d}{d}}\right)=(e,e_K)\Longrightarrow\left(\left\langle\left(h^{\frac{m}{d}}\right),e_K\right\rangle:1\right)=d$$

كما أنّ : $\left(t^{\frac{n}{d}}\right)^d=t^{\frac{nd}{d}}=t^n=e$

لنأخذ الزمرة $\left\langle\left(e_H,t^{\frac{n}{d}}\right)\right\rangle$ الجزئية في $H\oplus K$

$$\left(e_H,t^{\frac{n}{d}}\right)^d=(e_H,e)\Longrightarrow\left(\left\langle\left(e_H,t^{\frac{n}{d}}\right)\right\rangle:1\right)=d$$

$$\langle (e_H, t^{\frac{n}{d}}) \rangle \neq \langle (h^{\frac{m}{d}}), e_K \rangle$$

لأنّ $h^{\frac{m}{d}} \neq e_K$ , تم إيجاد زمرتين مختلفتين لهما نفس المرتبة وهذا يناقض حسب مبرهنة سابقة كون $H \oplus K$ دوارة .. ومنه الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي فإن $gcd(n,m) = 1$ أي أنّ $n, m$ أوليان فيما بينهما .

" $\Longrightarrow$ " لنفرض أنّ $gcd(n,m) = 1$ ولنأخذ الزمرة $\langle (h,t) \rangle$

$0(h,t) = Icm\big(0(h), 0(t)\big) = Icm(n,m) = nm \Longrightarrow H \oplus K = \langle (h,t) \rangle \Longrightarrow$ دوارة $H \oplus K$

نتيجة :

$\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ زمرتين دوارتين مراتبهما أعداد أولية فيما بينها فناتج الجداء يكون زمرة دوارة

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$$

نتيجة :

$$m = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_t$$

$$\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_t}$$

عندما وفقط عندما $n_i, n_j$ أولية فيما بينها بحيث $i \neq j$

... انتهت المحاضرة ...