... حل الوظائف ...

ـ تمرين المحاضرة (16) ..

أوجد تحويل لابلاس $L[f(t)]$ من أجل :

$$f(t) = t.\sin kt$$
$$f(t) = t.\cos kt$$

حيث : $k \in \mathcal{R}$

الحل :

$$f(t) = t.\cos kt$$

$$F(s) = L[\cos kt] = \frac{s}{s^{2+}k^2} \implies L[t.\cos kt] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$\xRightarrow{\text{بالاشتقاق}} = -\frac{(s^2+k^2) - s.2s}{(s^2+k^2)^2} = \frac{k^2-s^2}{(k^2+s^2)^2}$$

$$f(t) = t.\sin kt$$

$$F(s) = L[\sin kt] = \frac{k}{s^2+k^2} \implies L[t.\sin kt] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$\xRightarrow{\text{بالاشتقاق}} = -\frac{-k.2s}{(s^2+k^2)^2} = \frac{2k.s}{(s^2+k^2)^2}$$

ـ تمرين المحاضرة (19) ..

انشر في (متسلسلة فورييه) التابع $f(x) = x^2$ على المجال $I = [-\pi, +\pi]$

الحل :

نلاحظ أن : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \ ,\forall x$

$\Leftarrow \ f(x) = x^2$ 〈 تابع زوجي 〉

وبالتالي :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} . \int_0^{\pi} f(x) . dx = \frac{2}{\pi} . \int_0^{\pi} x^2 . dx = \frac{2}{\pi} . \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$(n \geq 1) , a_n = \frac{2}{\pi} . \int_0^{\pi} f(x) . \cos nx . dx = \frac{2}{\pi} . \int_0^{\pi} x^2 \cos nx . dx$$

$$\xrightarrow{\text{تكامل بالتجزئة}} \begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x. dx \\ dv = \cos nx \Rightarrow v = \frac{1}{n} \sin nx \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{x^2}{n} \sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x. \sin nx . dx \right\} \Rightarrow \left[\frac{x^2}{n} \sin nx\right]_0^{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x. \sin nx . dx \xrightarrow{\text{تكامل بالتجزئة}} \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin nx . dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{4}{n\pi} \left\{ \left[-\frac{x}{n} . \cos n\pi\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} . \int_0^{\pi} \cos nx . dx \right\}$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \left\{ \left(-\frac{\pi}{n} . \cos n\pi - 0\right) + \frac{1}{n^2} [\sin nx]_0^{\pi} \right\} \Rightarrow \frac{1}{n^2} [\sin nx]_0^{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4}{n^2} (-1)^n \quad , (n \geq 1)$$

وأيضاً :

$$(n \geq 1) , b_n = 0$$

ومنه .. وبما أن التابع $f(x) = x^2$ مستمر على المجال $]-\pi, +\pi[$ نستنتج أن :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n . \cos nx \qquad , \forall x \in]-\pi, +\pi[$$

وبما أن المطلوب هو النشر على المجال المغلق فنكمل :

$$\Rightarrow S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{(-\pi)^2 + \pi^2}{2} = \pi^2$$

$$\Rightarrow f(\pi) = f(-\pi) \Rightarrow \begin{cases} S(\pi) = f(\pi) \\ S(-\pi) = f(-\pi) \end{cases}$$

$\Leftarrow$ النشر المطلوب هو $\left\langle x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} . (-1)^n \cos nx \quad , \forall x \in [-\pi, +\pi] \right\rangle$

ملاحظة ..

يستفاد من نشر فورييه في أمور كثيرة .. منها حساب مجاميع المتسلسلات وأبرزها المتسلسلات الريمانية ..
فمثلاً في المنشور السابق لو أننا أخذنا نقطة ما (x) من المجال $[-\pi, +\pi]$ لحصلنا على مجموع لمتسلسلة ريمانية ..

أمثلة على ذلك :

$$[x = 0] \Longrightarrow 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} .(-1)^n \Longrightarrow -\frac{\pi^2}{3} = 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

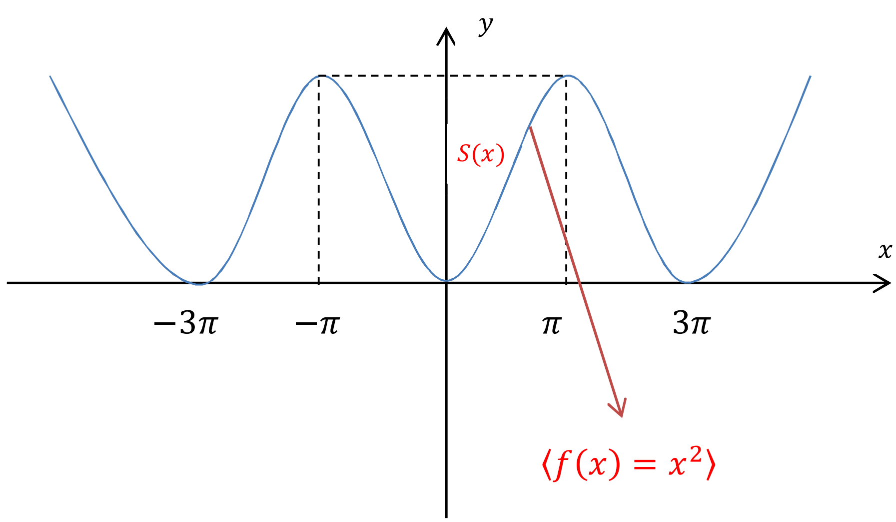
وهي متسلسلة متقاربة (حسب اختبار ليبنز) ومجموعها هو $\frac{\pi^2}{12}$ ..

$$[x = \pi] \Longrightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} .(-1)^n . \cos n\pi \Longrightarrow \frac{2}{3}\pi^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} .(-1)^n .(-1)^n$$

$$\overset{\div 2}{\Longrightarrow} \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} .(-1)^{2n} \quad \Longrightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ملاحظة ..

يمكن نشر أي تابع في متسلسلة فورييه سواء كان هذا التابع دوري أو غير دوري ..
ولكن التطابق بين $f(x)$ وَ $S(x)$ يكون على المجال المدروس (فقط) فيما إذا كان التابع المدروس غير دوري (كما في الرسم ـ مع $\langle f(x) = x^2 \rangle$ على المجال $I = [-\pi, +\pi]$ مثلاً) أما في حال كونه تابعاً دورياً فإن التطابق يكون كلياً ..



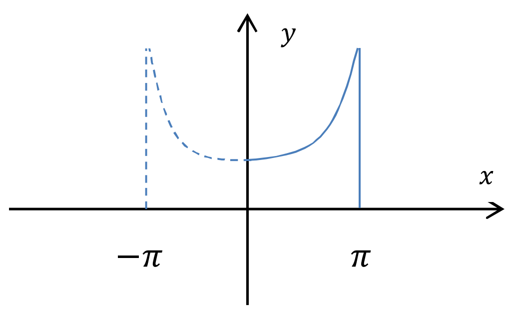
- ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$ .. عندئذٍ لكي ننشر التابع $f(x)$ في متسلسلة فورييه نستخدم الدساتير التالية :

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \,.\, dx \\ a_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) . \cos\left(\dfrac{2\pi . nx}{T}\right) . dx \;\; , (n \geq 1) \\ b_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) . \sin\left(\dfrac{2\pi . nx}{T}\right) . dx \;\; , (n \geq 1) \end{cases}$$

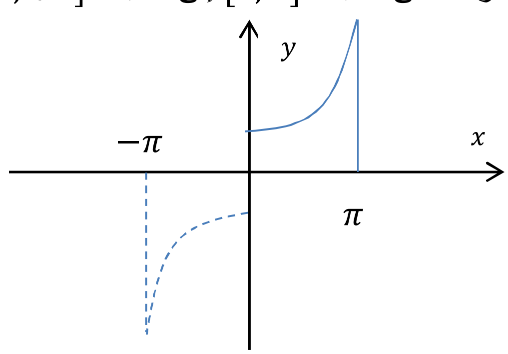
$$\Longrightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n . \cos\left(\frac{2\pi . nx}{T}\right) + b_n . \sin\left(\frac{2\pi . nx}{T}\right)\right)$$

ملاحظة :

يمكن تمديد التابع الزوجي المعرف على المجال $[0, \pi]$ إلى المجال $[-\pi, +\pi]$ كما هو موضح في الرسم التالي :



ويمكن تمديد التابع الفردي المعرف على المجال $[0, \pi]$ إلى المجال $[-\pi, +\pi]$ كما هو موضح في الرسم التالي :

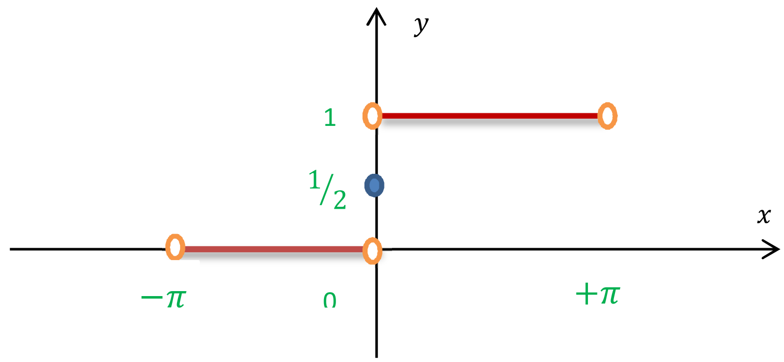


مثال :

لنأخذ التابع $f(x)$ (الغير مستمر تماماً) ..

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \; (-\pi < x < 0) \\ \dfrac{1}{2} & : \; (x = 0) \\ 1 & : \; (0 < x < \pi) \end{cases}$$

انشر هذا التابع في متسلسلة فورييه على المجال $]-\pi, +\pi[$



الحل : (نلاحظ أنه فقط عند الصفر لا يوجد استمرار)

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x).dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}f(x).dx+\int_{0}^{\pi}f(x).dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}0.dx+\int_{0}^{\pi}1.dx\right\}=\frac{1}{\pi}[x]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}(\pi-0)=1$$

$$(n\geq 1)\ ,a_n=\frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{+\pi}f(x).\cos nx.dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}0.dx+\int_{0}^{\pi}\cos nx.dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}.\frac{1}{n}[\sin nx]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi n}(0-0)=0$$

$$(n\geq 1)\ ,b_n=\frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{+\pi}f(x).\sin nx.dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}0.dx+\int_{0}^{\pi}\sin nx.dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}.\frac{-1}{n}[\cos nx]_0^{\pi}=\frac{-1}{\pi n}((-1)^n-1)=\frac{1-(-1)^n}{\pi n}$$

$$\Rightarrow f(x)\overset{(*)}{=}\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n}.\sin nx\quad ,\forall\, x\in\,]-\pi,+\pi[\,/[0]$$

فلندرس الآن $[0]$ لوحده ..

$$f(0)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n}.\sin(0)\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

وبالتالي المساواة $(*)$ صحيحة .. ومنه النشر صحيح على المجال المفتوح كاملاً أي : $\forall\, x\in\,]-\pi,+\pi[$

ملاحظة :

لو كانت عند $[0]$ غير محققة .. فإننا نكتب بأن النشر فقط صحيح على المجال ($]-\pi,+\pi[\,/[0]$)

... متطابقة بارسيفال ...

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2.dx$$

" انتهت المحاضرة " ....