المحاضرة : (14)

$$f : G \longrightarrow G'$$

$Hom(G, G') \neq \emptyset$ بسبب وجود التطبيق الذي يربط كل عنصر من G بمحايد G'

أثبت أنّ $End(G)$ غير خالية وتجميعية وتقبل عنصر محايد . "الحيادي هو المطابق I"

تمهيدية : لتكن G زمرة أثبت أنّ المجموعة $Aut(G)$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات .

تمهيدية : لتكن G زمرة و $a \in G$, عندئذٍ :

1- التطبيق $T_a : G \longrightarrow G$ المعرف بالشكل $\forall x \in G \; ; \; T_a(x) = axa^{-1}$ هو تماثل للزمرة G .

2- $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$

الإثبات : 1- ليكن $x, y \in G$: " تطبيق " $\quad x = y$

$$axa^{-1} = aya^{-1}$$

$$T_a(x) = T_a(y)$$

" تشاكل " $\quad T_a(x \cdot y) = a(x \cdot y)a^{-1}$

$$T_a(x \cdot y) = a(x.e.y)a^{-1} = a(x \cdot a^{-1}a \cdot y)a^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = T_a(x) \cdot T_a(y)$$

" متباين " $\quad T_a(x) = T_a(y)$

$$axa^{-1} = aya^{-1} \Longrightarrow x = y$$

" غامر " ليكن $z \in G$, $a^{-1}za \in G$:

$$T_a(a^{-1}za) = aa^{-1} \cdot z \cdot a^{-1}a = z$$

ومما سبق يكون T_a تماثل في G .

2- $a^{-1} \in G$ فيكون $T_{a^{-1}}$ تماثل حسب (1-)

$T_a^{-1} = (T_a)^{-1}$, كل من T_a^{-1} و $T_{a^{-1}}$ موجود في $Aut(G)$

لإثبات تساويهما يجب أن يتساويا عند كل عنصر من عناصر المنطلق .

$T_a \in G \; , \; T_a^{-1} \in G \; : \quad T_a T_a^{-1} = T_e$

$$I_G : G \longrightarrow G$$

$$\forall x \in G \; ; \; I_G(x) = x = exe^{-1}$$

$$I_G = T_e$$

$$T_a T_a^{-1}(x) = T_e(x) \quad \forall\, x \in G$$

$$T_a\left(T_a^{-1}(x)\right) = T_e(x) = x$$

$$a\left(T_a^{-1}(x)\right)a^{-1} = x$$

$$T_a^{-1}(x) = a^{-1}xa = a^{-1}x(a^{-1})^{-1} = T_{a^{-1}}(x) \quad \forall\, x \in G$$

$$T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$$

تعريف : لتكن G زمرة و $a \in G$, نسمي التماثل T_a تماثلاً داخلياً للزمرة G
نرمز لمجموعة التماثلات الداخلية للزمرة G بالشكل $Inn(G)$ وهي جزئية في $Aut(G)$.

مبرهنة : لتكن G زمرة عندئذٍ :

1- مجموعة التماثلات الداخلية $Inn(G)$ هي زمرة جزئية ناظمية في $Aut(G)$.

2- $\frac{G}{\mathbb{Z}(G)} \cong Inn(G)$.

الإثبات : 1- وجدنا سابقاً أنّ $Inn(G)$ زمرة جزئية غي $Aut(G)$:

ليكن $T_a, T_b \in Inn(G)$ حيث $a, b \in G$, وليكن $x \in G$ عندئذٍ :

$$T_a T_b^{-1}(x) = T_a\left(T_{b^{-1}}(x)\right) = T_a(b^{-1}xb) = (ab^{-1})x(ba^{-1}) = T_{ab^{-1}}(x)$$

$$ab^{-1}G \Longrightarrow T_{ab^{-1}} \text{ تماثل}$$

$$T_a T_b^{-1} = T_{ab^{-1}} \in Inn(G) \Longrightarrow Inn(G) \text{ زمرة جزئية في } Aut(G)$$

ليكن $f \in Aut(G)$ ولنبرهن $f \cdot Inn(G) \cdot f^{-1} \subseteq Inn(G)$

ليكن $g \in f \cdot Inn(G) \cdot f^{-1}$ عندئذٍ يوجد $T_a \in Inn(G)$ بحيث $a \in G$ يحقق :

$$g = f \cdot T_a \cdot f^{-1}$$

ليكن $x \in G$ عندئذٍ :

$$g(x) = f \cdot T_a \cdot f^{-1}(x)$$

$$g(x) = f\left(T_a\left(f^{-1}(x)\right)\right)$$

$$g(x) = f(af^{-1}(x)a^{-1})$$

$$g(x) = f(a) \cdot f\left(f^{-1}(x)\right) \cdot f(a^{-1}) = f(a) \cdot T_e(x) \cdot f[(a)]^{-1} = f(a) \cdot x \cdot f[(a)]^{-1}$$

$$f(a) \cdot x \cdot [f(a)]^{-1} = T_{f(a)}(x)$$

$$g(x) = T_{f(a)}(x)\ \ (\forall\, x \in G) \Longrightarrow g = T_{f(a)} \in Inn(G)$$

وهذا يبين أنّ الزمرة الجزئية $Inn(G)$ ناظمية في $Aut(g)$.

2- لنعرف العلاقة : $\psi : G \longrightarrow Inn(G)$

$$\forall\, a \in G \quad ; \quad \psi(a) = T_a$$

ليكن $a, b \in G$ بحيث $a = b$ ومنه $axa^{-1} = bxb^{-1}\ (\forall\, x \in G\,)$

$$T_a(x) = T_b(x) \quad (\,\forall x \in G\,)$$

$$T_a = T_b$$

$$\psi(a) = \psi(b) \Longrightarrow \text{تطبيق } \psi$$

$$\psi(ab) = T_{ab}$$

$$(\,\forall\, x \in G\,)\ \ T_{ab}(x) = (ab)x(ab)^{-1} = abxb^{-1}a^{-1} = a(bxb^{-1})a^{-1}$$

$$T_{ab}(x) = T_a(bxb^{-1}) = T_aT_b(x)$$

$$\psi(ab) = T_{ab} = T_aT_b = \psi(a)\psi(b) \Longrightarrow \text{تشاكل } \psi$$

وهو أيضاً غامر لأنه أياً كان $T_d \in Inn(G)$ بحيث $d \in G$ فإنّ $\psi(d) = T_d$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى يكون : $\dfrac{G}{ker\,\psi} \cong Inn(G)$

لنبرهن الآن على أنّ $ker\,\psi = \mathbb{Z}(G)$, ليكن $a \in ker\,\psi$ عندئذٍ :

$$\left.\begin{matrix} \psi(a) = T_a \\ \psi(a) = T_e \end{matrix}\right\} \Longrightarrow T_a = T_e \quad \forall\, x \in G$$

ومنه $T_a(x) = T_e(x)$

$$axa^{-1} = exe^{-1} = x$$

$$ax = xa \Longrightarrow a \in \mathbb{Z}(G) \Longrightarrow kre\,\psi \subseteq \mathbb{Z}(G)$$

ليكن $b \in \mathbb{Z}(G)$

$$\forall\, x \in G : bx = xb$$

$$bxb^{-1} = x$$

$$T_b(x) = x = T_e(x) \overset{\forall x}{\Longrightarrow} T_b = T_b$$

$$\psi(b) = T_b = T_e$$

$$b \in ker\,\psi \Longrightarrow \mathbb{Z}(G) \subseteq ker\,\psi$$

ومن الاحتوائين يكون $\mathbb{Z}(G) = ker\,\psi$ وبذلك يكون $\frac{G}{\mathbb{Z}(G)} = Inn(G)$.

تمرين : ادرس وجود أو عدم وجود تماثل بين الزمر التالية : $U(5), \mathbb{Z}_4, U(10)$

تذكرة : جميع الزمر الدوارة المنتهية والتي مرتبة كل منها n تكون متماثلة

$$U(5) = \{1,2,3,4\} \quad , \quad \mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\} \quad , \quad U(10) = \{1,3,7,9\}$$

نلاحظ أنّ : $(U(5):1) = (\mathbb{Z}_4:1) = (U(10):1) = 4$

$$\mathbb{Z}_4 = \langle 1 \rangle \quad , \quad \mathrm{U}(5) = \langle 2 \rangle \quad , \quad \mathrm{U}(10) = \langle 3 \rangle$$

ومنه يكون : $\mathbb{Z}_4 \cong U(5) \cong U(10)$

تمرين : ادرس وجود أو عدم وجود تماثل بين الزمر التالية : $U(12), U(10)$

$$U(12) = \{1,5,7,11\} \quad , \quad U(10) = \{1,3,7,9\}$$

$$(U(10):1) = (U(12):1) = 4$$

لكن $U(12)$ ليست دوارة ومن لا يوجد تماثل بين الزمرتين $U(12), U(10)$.

وظيفة : ادرس وجود أو عدم وجود تماثل بين الزمر التالية : -1 $U(10), U(8)$

-2 $U(20), U(24)$

تمرين : لتكن G زمرة تبديلية أثبت أنّ :

$$G^n = \{\, g^n \;:\; g \in G \quad n \in \mathbb{Z} \,\}$$

زمرة جزئية في G , إذا كانت G, H زمر تبديلية وكانت $H \cong G$ أثبت أنّ $G^n \cong H^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

الحل :

$$e^n = e \in G \Longrightarrow G^n \neq \emptyset$$

$$\forall\, g \in G \;;\; g^n \in G \Longrightarrow G^n \subseteq G$$

$$\forall\, a, b \in G \;;\; a^n, b^n \in G^n$$

$$a^n \cdot b^{-n} \overset{??}{\in} G^n$$

$$a \cdot b \in G \quad , \quad a \cdot b^{-1} \in G$$

$$(a \cdot b^{-1})^n \in G^n \Longrightarrow a^n \cdot b^{-n} \in G^n$$

وبالتالي تكون G زمرة جزئية في G

الطلب الثاني وظيفة .

... انتهت المحاضرة ...