حلول ... في مقرر نظرية الاحتمالات

السنة الثالثة رياضيات

الفصل الأول ٢٠١٣ - ٢٠١٤

٣- يحوي صندوق 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء. سحبنا 3 كرات من هذا الصندوق فإذا فرضنا أن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة. المطلوب:

١- أوجد جدول التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي.

٢- أوجد التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير العشوائي.

الحل: إن مجموعة قيم المتغير العشوائي هي: $R_x = \{0, 1, 2, 3\}$

- عدد الطرق الممكنة لسحب 3 كرات حمراء من الصندوق هي:

$$C^7_3 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = 35$$

ويكون 3 بيض + 0 أحمر

$$f(0) = p(x=0) = \frac{C^4_0\, C^3_3}{C^7_3} = \cdots = \frac{1}{35}$$

2 أبيض + 1 أحمر

$$f(1) = p(x=1) = \frac{C^4_1\, C^3_2}{C^7_3} = \cdots = \frac{12}{35}$$

1 أبيض + 2 أحمر

$$f(2) = p(x=2) = \frac{C^4_2\, C^3_1}{C^7_3} = \cdots = \frac{18}{35}$$

0 أبيض + 3 أحمر

$$f(3) = p(x=3) = \frac{C^4_3\, C^3_0}{C^7_3} = \cdots = \frac{4}{35}$$

وبالتالي فإن جدول التوزيع الاحتمالي يصبح بالشكل:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

٢-

$$E(x) = \frac{12 + 36 + 12}{35} = \frac{60}{35} = \frac{12}{7}$$

$$E(x^2) = \frac{12 + 72 + 36}{35} = \frac{120}{35} = \frac{24}{7}$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{24}{7} - \frac{144}{49} = \frac{168 - 144}{49} = \frac{24}{49}$$

[٤] يحوي صندوق 3 كرات بيضاء، كرة سوداء وكرة حمراء، سحبنا 3 كرات من هذا الصندوق، فإذا فرضنا أن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة وأن Y متغير عشوائي يدل على عدد الكرات السوداء المسحوبة،

١- أوجد جدول التوزيع المشترك للمتغيرين العشوائيين.

٢- أوجد معامل الارتباط بينهما...

الحل: إن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي: $R_X = \{1, 2, 3\}$ -١

Y هي $R_Y = \{0, 1\}$

عدد الطرق الممكنة لسحب 3 كرات هو:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = 10$$

ويكون:

$(1,0) = P(X=1, Y=0) = P(\phi) = 0$

$(1,1) = P(X=1, Y=1) = \dfrac{C_1^3 C_1^1 C_1^1}{C_3^5} = \dfrac{3}{10}$

$(2,0) = P(X=2, Y=0) = \dfrac{C_2^3 C_0^1 C_1^1}{C_3^5} = \dfrac{3}{10}$

$(2,1) = P(X=2, Y=1) = \dfrac{C_2^3 . C_1^1 . C_0^1}{C_3^5} = \dfrac{3}{10}$

$(3,0) = P(X=3, Y=0) = \dfrac{C_3^3 C_0^1 C_0^1}{C_3^5} = \dfrac{1}{10}$

$(3,1) = P(X=3, Y=1) = P(\phi) = 0$

وبالتالي فإن جدول التوزيع المشترك للمتغيرين العشوائيين هو:

$X \backslash Y$	0	1	المجموع
1	0	0.3	0.3
2	0.3	0.3	0.6
3	0.1	0	0.1
المجموع	0.4	0.6	1

٢- لكي نجد معامل الارتباط بين X و Y نوجد التوقع الرياضي والتباين لكل من X و Y ثم نوجد التغاير بينهما وأخيراً نعوض في قانون الارتباط.

جدول التوزيع الهامشي لـ X هو:

x	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.6	0.1

$$E(X) = 0.3 + 1.2 + 0.3 = 1.8$$

$$E(X^2) = 0.3 + 2.4 + 0.9 = 3.6$$

$$Var(X) = 3.6 - (1.8)^2 = 0.36$$

جدول التوزيع الهامشي لـ Y هو:

y	0	1
$g(y)$	0.4	0.6

$$E(Y) = 0.6$$

$$E(Y^2) = 0.6$$

$$Var(Y) = 0.6 - (0.6)^2 = 0.24$$

$$E(XY) = 0.3 + 0.6 = 0.9$$

$$Cov(X, Y) = 0.9 - (1.8)(0.6) = -0.18$$

$$\rho(X, Y) = \frac{-0.18}{\sqrt{0.36 \times 0.24}} = -0.61 \qquad \boxed{\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}}$$

س٤ ليكن (X, Y) متجهاً ثنائياً كثافته:

$$f(x, y) = \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}, \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad a_2 \leq y \leq b_2$$

المطلوب: ١- أوجد الكثافة الهامشية لكل من X و Y.

٢- أوجد دالة التوزيع الهامشية لكل من X و Y.

الحل:

-١-

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_{a_2}^{b_2} \frac{dy}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}$$

$$= \frac{y \Big|_{a_2}^{b_2}}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} = \frac{b_2 - a_2}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} = \frac{1}{b_1 - a_1}$$

إذاً:

$$f(x) = \frac{1}{b_1 - a_1}; \quad a_1 \leq x \leq b_1$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$f(y) = \frac{1}{b_2-a_2} \quad ; \quad a_2 \le y \le b_2$$

ج- لإيجاد دالة التوزيع الاحتمالية لـ X نجد:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{b_1-a_1} = \int_{a_1}^{x} \frac{dt}{b_1-a_1}$$

$$= \frac{t}{b_1-a_1}\Big|_{a_1}^{x} = \frac{x-a_1}{b_1-a_1}$$

ومنه نجد:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ ; & x \le a_1 \\ \frac{x-a_1}{b_1-a_1} \ ; & a_1 \le x \le b_1 \\ 1 \ ; & x \ge b_1 \end{cases}$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$F(y) = \begin{cases} 0 \ ; & y \le a_2 \\ \frac{y-a_2}{b_2-a_2} \ ; & a_2 \le y \le b_2 \\ 1 \ ; & y \ge b_2 \end{cases}$$

$\boxed{4}$ ليكن (X,Y) متغيراً عشوائياً دالة كثافته من الشكل: [illegible]

$$f(x,y) = x+y \quad ; \quad 0 \le x, y \le 1$$

المطلوب: ١- أوجد كلاً من $f(x)$ ، $h(y|x)$ ثم استنتج $(y|x=0.25)$.

٢- احسب $Var(Y|x=0.25)$.

٣- احسب $E(XY^2)$ ثم $E(X^2Y^2)$.

٤- أوجد معامل الارتباط $\rho(X,Y)$.

الحل:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{1} (x+y)\,dy = \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \ldots$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \quad ; \quad 0 < x < 1$$

$$h(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} \quad ; \quad 0 \le y \le 1$$

$$h(y|x=0.25) = \frac{1+4y}{3} \quad ; \quad 0 \le y \le 1$$

2

$$E(Y|x=0.25) = \int_0^1 \frac{y(1+4y)}{3}\,dy = \frac{\frac{y^2}{2}+\frac{4}{3}y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{11}{18}$$

$$E(Y^2|x=0.25) = \int_0^1 \frac{y^2(1+4y)}{3}\,dy = \frac{\frac{y^3}{3}+y^4}{3}\Big|_0^1 = \frac{4}{9}$$

$$Var(Y|x=0.25) = \frac{4}{9} - \left(\frac{11}{18}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{121}{324} = \frac{23}{324}$$

3

$$E(XY^2) = \int_0^1\int_0^1 xy^2(x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 x^2y^2\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 xy^3\,dx\,dy$$

$$= \frac{x^3}{3}\frac{y^3}{3}\Big|_0^1\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\frac{y^4}{4}\Big|_0^1\Big|_0^1 = \frac{1}{9}+\frac{1}{8} = \frac{17}{72}$$

$$E(X^2-Y^2) = E(X^2) - E(Y^2)$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$g(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = \frac{1}{2}+y$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2\left(\frac{1}{2}+y\right)dy = \frac{5}{12}$$

$$E(X^2-Y^2) = 0$$

$$Var(X) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{60-49}{144} = \frac{11}{144}$$

$$Var(Y) = \frac{11}{144}$$

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{3}$$

$$\text{cov}(X,Y) = \frac{\frac{1}{3} - \frac{49}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144} \cdot \frac{11}{144}}} = \frac{-\frac{1}{144}}{\frac{11}{144}} = -\frac{1}{11}$$

٥- بينت إحصائية في إحدى المدن أن 20% من الأسر لا تمتلك أي سيارة و 50%
من الأسر تمتلك سيارة واحدة و 15% من الأسر تمتلك سيارتين و 10% من
الأسر تمتلك ثلاث سيارات و 5% من الأسر تمتلك أربع سيارات. ولو
X متغير عشوائي يدل على عدد السيارات و أن Y متغير عشوائي يدل على
العجلات التي تمتلكها الأسرة. المطلوب:

١- أوجد جدول التوزيع الاحتمالي لكلاً من X و Y.

٢- أوجد الانحراف المعياري لكلاً من X و Y.

الحل

١- إن مجموعة قيم المتغير X هي: $R_x = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

وبالتالي فإن جدول التوزيع الاحتمالي لـ X هو:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.20	0.50	0.15	0.10	0.05

إن مجموعة قيم المتغير Y هي: $R_y = \{0, 4, 8, 12, 16\}$

وبالتالي فإن جدول التوزيع الاحتمالي لـ Y هو:

y	0	4	8	12	16
$g(y)$	0.20	0.50	0.15	0.10	0.05

٢-

$E(X) = 0.50 + 0.30 + 0.30 + 0.20 = 1.3$

$E(X^2) = 0.50 + 0.60 + 0.90 + 0.80 = 2.8$

$Var(X) = 2.8 - (1.3)^2 = 2.8 - 1.69 = 1.11 \Rightarrow \sigma_x = 1.05$

$E(Y) = 2 + 1.2 + 1.2 + 0.80 = 5.20$

$E(Y^2) = 8 + 9.6 + 14.4 + 12.8 = 44.8$

$Var(Y) = 44.8 - (5.2)^2 = 44.8 - 27.04 = 17.76$

$\sigma_y = 4.21$