22/12/2013

المحاضرة الثالثة والعشرون

الفصل الخامس: مراجعة وحل تمارين

١- اكتب الأعداد العقدية التالية بالشكل الجبري بالقيمة الرئيسية:

$\boxed{1}$ $z_1 = \sqrt{i}$

$\boxed{2}$ $z_2 = \ln(-e)$

$\boxed{3}$ $z_3 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right)$

$\boxed{4}$ $z_4 = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}\right)^{10}$

1) $z_1 = (i)^{\frac{1}{2}}$

$$= e^{\frac{1}{2}(\ln|i| + i(\mathrm{Arg}(i) + 2\pi k))} \quad ; k=0$$

$$= e^{\frac{1}{2}(\ln 1 + i(\mathrm{Arg}(i))} = e^{\frac{1}{2}(i\frac{\pi}{2})} = e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) $z_2 = \ln(-e)$

$$= \ln|-e| + i(\mathrm{Arg}(-e) + 2\pi k) \; ; \; k=0$$

$$= \ln e + i(\mathrm{Arg}(-e))$$

$$= 1 + i\pi$$

للتأكد من الحل نأخذ e للعدد الناتج

3) $z_3 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right)$

$$= \frac{e^{i(\frac{\pi}{2} - i)} - e^{-i(\frac{\pi}{2} - i)}}{2i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2} + 1} - e^{-i\frac{\pi}{2} - 1}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e - e^{-\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{-1}}{2i} = \frac{(i)e - (-i)e^{-1}}{2i} = \frac{e + e^{-1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) = \frac{e + \frac{1}{e}}{2}$$

4) $$z_4 = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}\right)^{10} = \left(\frac{2 \operatorname{cis} \frac{-\pi}{3}}{2 \operatorname{cis} \frac{-\pi}{6}}\right)^{10} = \left[\operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \left[\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{10} = \operatorname{cis} 10\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{-5\pi}{3}\right)$$

$$= \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2- حل المعادلات التالية في $\mathbb{C}$:

1) $z^6 - i = 0$

$$z^6 = i \Rightarrow z = \sqrt[6]{i}$$

نفرض أن $z = r \operatorname{cis} \theta$

$$\Rightarrow (r \operatorname{cis} \theta)^6 = \overset{i}{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow r^6 \operatorname{cis} 6\theta = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

بالمطابقة نجد :

$$\Rightarrow \begin{cases} r^6 = 1 \Rightarrow r = 1 \\ 6\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k \ , \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

نعوض قيم k في المعادلة الأخيرة

$$k=0 \Rightarrow z_1 = 1 \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$75°$

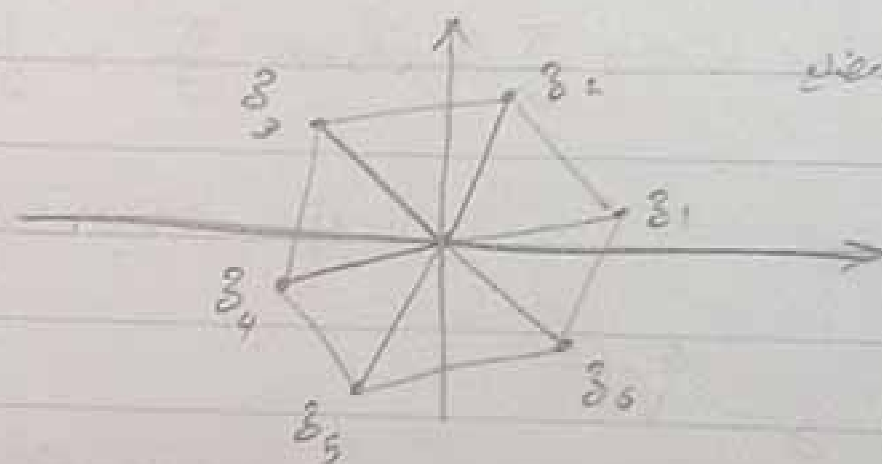
$$k=1 \rightarrow z_2 = cis\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right) = cis\left(\frac{5\pi}{12}\right) =$$

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$k=2 \rightarrow z_3 = cis\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right) = cis\left(\frac{9\pi}{12}\right) = cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k=3 \Rightarrow z_4 = -z_1$$



الجذور تقع على رؤوس مضلع منتظم

$$k=4 \rightarrow z_5 = -z_2$$

$$k=5 \rightarrow z_6 = -z_3$$

2) $z^2 - (1+i)z + (i) = 0$

$$\Delta = (1+i)^2 - 4i = 1 + 2i - 1 - 4i = -2i$$

نفرض أنّ $\sqrt{\Delta} = r\,cis\,\theta$

$$(r\,cis\,\theta)^2 = \Delta = 2\,cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$r^2\,cis\,2\theta = 2\,cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

بالمطابقة :

$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$ نأخذ دائماً الجذر الموجب

$$2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \longrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} + \pi k \; ; \; k = 0, 1$$

$$k=0 \rightarrow \sqrt{\Delta_1} = \sqrt{2}\,cis\,\frac{3\pi}{4} = -1 + i$$

$$k=1 \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4} \rightarrow \sqrt{\Delta_2} = \sqrt{2}\,cis\,-\frac{\pi}{4}$$

$$= 1 - i$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_1}}{2a} = \frac{(1+i) + (-1+i)}{2} = i$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_2}}{2a} = \frac{(1+i) + (1-i)}{2} = 1$$

3) $\cos z - 2 = 0 \Rightarrow \cos z = 2 \Rightarrow \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$

$$e^{iz} + e^{-iz} = 4 \Rightarrow e^{2iz} + 1 = 4e^{iz}$$

$$\Rightarrow e^{2zi} - 4e^{iz} + 1 = 0$$

$w^2 - 4w + 1 = 0 \Leftarrow e^{iz} = w$ نفرض أنّ

$$\Delta = 12 \rightarrow \sqrt{\Delta} = \mp\sqrt{12} = \mp 2\sqrt{3}$$

$$w_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow e^{iz_1} = 2 - \sqrt{3}$$

$$iz_1 = \ln(2 - \sqrt{3}) = \ln|2 - \sqrt{3}| + i(0 + 2\pi k) ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z_1 = -i \ln(2 - \sqrt{3}) + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z}$$

بطريقة مشابهة:

$$z_2 = -i \ln(2 + \sqrt{3}) + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z}$$

سؤال امتحاني

3) ليكن العددان العقديان $z_1 = i , z_2 = 2 + 3i$ المطلوب:
مثّل هندسياً في المستوي العقدي z_1 , z_2 ثم أوجد صورة كل منهما على كرة
ريمان واحسب المسافة الفعلية والوترية بينهما.

نفرض أن P_1 و P_2 صورة كل من z_1 و z_2 على الترتيب :

$$P_1 = \left(\frac{2x_1}{|z_1|^2+1}, \frac{2y_1}{|z_1|^2+1}, \frac{|z_1|^2-1}{|z_1|^2+1} \right) = (0, 1, 0)$$

$$P_2 = \left(\frac{2x_2}{|z_2|^2+1}, \frac{2y_2}{|z_2|^2+1}, \frac{|z_2|^2-1}{|z_2|^2+1} \right) = \left(\frac{4}{14}, \frac{6}{14}, \frac{12}{14} \right)$$

حساب المسافة الفعلية :

$$|z_1 - z_2| = |i-2-3i| = 2\sqrt{2}$$

حساب المسافة الوترية :

م$_1$: المسافة الوترية بين z_1 و z_2 هي نفسها المسافة بين P_1 و P_2 =

$$\sqrt{\left(0-\frac{4}{14}\right)^2 + \left(1-\frac{6}{14}\right)^2 + \left(0-\frac{12}{14}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{196} + \frac{64}{196} + \frac{144}{196}} = \sqrt{\frac{224}{196}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

م$_2$:

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(|z_1|^2+1)(|z_2|^2+1)}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{(2)(14)}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{28}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

4) ادرس تقارب وتباعد المتتاليات العقدية التالية :

$\boxed{1}$ $\{z_n\} = \left\{ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} + \left(\frac{n+1}{n}\right) i \right\}$

الحل: نلاحظ أن

$$x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} e^2$$

$$y_n = \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

وبالتالي حسب مبرهنة مثبتة

$$z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^2 + 1(i)$$

والمتتالية متقاربة

$\boxed{2}$ $\{z_n\} = \left\{ \frac{e^{i}}{n+1} \right\}$

نلاحظ أن $z_n = \frac{\cos(1)}{n+1} + i\frac{\sin(1)}{n+1}$

[illegible]

$x_n = \frac{\cos(1)}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad , \quad y_n = \frac{\sin(1)}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

وبالتالي $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ والمتتالية متقاربة

$\boxed{3}$ $\{z_n\} = \left\{ \frac{i^n}{n} \right\}$

نلاحظ أن: $|z_n| = \left| \frac{i^n}{n} \right|$

$= \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

والمتتالية عندئذٍ حسب مبرهنة فإن $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ والمتتالية متقاربة

$\boxed{4}$ $\{z_n\} = \{ n i^n \}$

نلاحظ أن $|z_n| = |n i^n|$

$= n |i|^n = n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

وبالتالي بحسب مبرهنة نجد أن المتتالية متباعدة.

$\boxed{5}$ $\{z_n\} = \left\{ 7\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i\right)^n \right\}$

نلاحظ أن المتتالية هي متتالية هندسية حدها الأول $a = 7$

وأساسها $q = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$

$|q| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9+16}{36}} < 1$

وبالتالي نجد أن المتتالية متقاربة حسب الدراسة النظرية.

5) ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات العقدية التالية:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i\right)^{n}$

نلاحظ أن المتسلسلة هندسية حدها الأول $a = 1$

وأساسها $q = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}i$

$\rightarrow |q| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{145}{144}} > 1$

$\Leftarrow$ المتسلسلة متباعدة.

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(1+i)^{n}}{2^{n}}$

حسب معيار الجذر النوني نجد:

$P = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}$

$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n(\sqrt{2})^{n}}{2^{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}\cdot(\sqrt{2})^{n/n}}{2^{n/n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

والمتسلسلة متقاربة.

3)

n^{n} ... i

نلاحظ أن متسلسلة الأجزاء الحقيقية

$x_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \rightarrow$ x_n متباعدة

$\Leftarrow$ المتسلسلة الأصلية متباعدة

4) $\sum_{n=} \frac{n^{n}}{n!}\,i$

حسب دالامبير

$P = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim\left|\frac{(n+1)^{n}\cdot(n+1)\,n!}{(n+1)\,n!\cdot n^{n}}\right|$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$$