كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق

السنة : الثانية

المقرر : تحليل (3)

الفصل : الأول

المحاضرة : (18)

التاريخ : 2013/12/8

... حل الوظيفة ...

1) أوجد تحويل لابلاس العكسي التالي :

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-1)}\right]$$

الحل : (طريقة <1> نحلل لكسور بسيطة ..

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s-1)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s-1}\Longrightarrow 1=As-A+Bs^2-Bs+Cs^2$$

$$\Longrightarrow 1=(B+C)s^2+(A-B)s-A\Longrightarrow\begin{cases}B+C=0\\A-B=0\\A=-1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}A=-1\\B=-1\\C=1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow F(s)=\frac{-1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}$$

$$\Longrightarrow L^{-1}[F(s)]=-L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

$$\Longrightarrow L^{-1}[F(s)]=-t-1+e^t$$

(طريقة <2> نستخدم مبرهنة الطي ..

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\,\frac{1}{s-1}\right]=L^{-1}[F(s).G(s)]$$

حيث : $F(s)=\dfrac{1}{s^2}$, $G(s)=\dfrac{1}{s-1}$

ومنه : $f(t)=t$, $g(t)=e^t$

ومنه نجد ما يلي :

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-1)}\right]=\int_0^t f(u).g(t-u).du=\int_0^t u\,.e^{t-u}.du\xrightarrow{\text{تكامل بالتجزئة}}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}U=u\Longrightarrow dU=du\\dV=e^{t-u}.du\Longrightarrow V=-e^{t-u}\end{cases}\Longrightarrow L^{-1}[F(s)]=[-u\,.e^{t-u}]_0^t+\int_0^t e^{t-u}.du$$

$$=(-t-0)+(-[e^{t-u}]_0^t)$$

$$\Longrightarrow L^{-1}[F(s)]=-t-1+e^t$$

2) أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي من أجله يكون : $(x(0) = x'(0) = 0)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 1$$

وذلك باستخدام ـ تحويلات لابلاس ـ

الحل :

لنفرض أن : $L[x(t)] = X(s) \quad (*)$

عندئذٍ : ((نؤثّر بـ L على الطرفين ..)) وبما أن L خطي نكتب :

$$L\left[\frac{d^2x}{dt}\right] + 2.L\left[\frac{dx}{dt}\right] + 4.L[x] = L[t] \implies$$

$$[s^2.X(s) - s.x(0) - x'(0)] + 2[s.X(s) - x(0)] + 4.X(s) = \frac{1}{s}$$

$$\implies s^2.X(s) + 2s.X(s) + 4.X(s) = \frac{1}{s} \implies X(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+4)}$$

((بما أن المطلوب هو $x(t)$ نعود وفق (x) بتحويل عكسي L^{-1}))

$$\implies x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+4)}\right] = ? \quad (**)$$

$$\implies \frac{1}{s(s^2+2s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+4} \implies$$ (نوحد المقامات ونحذفها)

$$\implies 1 = As^2 + 2As + 4A + Bs^2 + Cs = (A+B)s^2 + (2A+C)s + 4A$$

$$\implies \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + C = 0 \\ 4A = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = -\frac{2}{4} \end{cases} \implies \frac{1}{s(s^2+2s+4)} = \frac{1}{4}.\frac{1}{s} + \frac{-\frac{1}{4}s - \frac{2}{4}}{s^2+2s+4}$$

$$\implies \frac{1}{s(s^2+2s+4)} = \frac{1}{4}.\frac{1}{s} - \frac{1}{4}.\frac{s+2}{s^2+2s+4} \implies$$ (حسب $(*)$)

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+4)}\right] = \frac{1}{4}.L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{4}.L^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+2s+4}\right]$$

ـ نتمم لمربع كامل ونجانس البسط والمقام :

$$\implies L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+4)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}.L^{-1}\left[\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+3}\right] \quad (***)$$

ـ نقوم بتقليص الكسر بحيث ((نبدل كل $(s+1)$ بـ (s)))

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+3}\right] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3}\right]$$

نلاحظ أن : $\left(\left(k=\sqrt{3}\right)\right)$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+3}\right] = \cos\sqrt{3}\,t + \frac{1}{\sqrt{3}}\,.\,L^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{s^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right]$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+3}\right] = \cos\sqrt{3}\,t + \frac{1}{\sqrt{3}}\,.\sin\sqrt{3}\ t \Rightarrow$$ (نعوض في $(***)$)

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+4)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ .\,e^{-t}\left(\cos\sqrt{3}\,t + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}\,t\right) = x(t)$$

و هو المطلوب ...

تمرين :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dx}{dt} + 2x = e^{-t}$$

ثم أوجد الحل الخاص الذي من أجله : $(x=3\ ,\ t=0)$

الحل :

نحل المعادلة المتجانسة : $\frac{dx}{dt} + 2x = 0$ ((نحلها بفصل المتحولات))

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -2x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -2dt \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln\left|\frac{x}{c}\right| = -2t = \ln e^{-2t} \Rightarrow \left|\frac{x}{c}\right| = e^{-2t}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = c.e^{-2t}}\quad (1) \longrightarrow$$ الحل العام للمعادلة المتجانسة

ومنه :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dc}{dt}\,.\,e^{-2t} + c.(-2).e^{-2t} \Rightarrow \frac{dc}{dt}\,.\,e^{-2t} - \cancel{2c.e^{-2t}} + \cancel{2c.e^{-2t}} = e^{-t}$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dt}\,.\,e^{-2t} = e^{-t} \xrightarrow{\text{نضرب بـ } e^{2t}} \frac{dc}{dt} = e^{t} \xrightarrow{\text{نكامل}} c = e^{t} + k \xrightarrow{\text{نعوض بـ } (1)} x = (e^{t}+k).e^{-2t}$$

وبالتالي :

$x = e^{-t} + k.e^{-2t} \quad (2) \quad \longrightarrow$ الحل العام للمعادلة مع طرف ثانٍ

ولإيجاد الحل الخاص ... نعوض $(x = 3 \;,\; t = 0)$ في المعادلة (2)

$$\Longrightarrow 3 = 1 + k(1) \Longrightarrow k = 2$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = e^{-t} + 2.e^{-2t}} \longrightarrow \text{الحل الخاص}$$

⟨ قوانين ⟩

$$1)\ \mathrm{L}[\sinh k.t] = \frac{k}{s^2 - k^2}$$

البرهان :

$$\sinh k.t = \frac{1}{2}(e^{kt} - e^{-kt}) \Longrightarrow L[\sinh k.t] = \frac{1}{2}(L[e^{kt}] - L[e^{-kt}])$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k}\right) = \frac{k}{s^2 - k^2}$$

$$2)\ L[\cosh k.t] = \frac{s}{s^2 - k^2}$$

البرهان : ((يُترك للقارئ العزيز))

... متسلسلات فورييه ...

تعريف :

يقال عن تابع مثل $f(x)$ أنه تابع دوري .. إذا كان يوجد عدد حقيقي مغاير للصفر ,, مثل T بحيث يكون :

$$\langle\, f(x+T) = f(x) \quad ,\forall x \,\rangle$$

تعريف :

يقال عن أصغر عدد حقيقي موجب تماماً مثل T بحيث يكون :

$$\langle\, f(x+T) = f(x) \quad ,\forall x \,\rangle$$

أنه دور التابع الدوري $f(x)$ .. ((وذلك في حال وجود مثل هذا العدد T)) ..

أمثلة :

1) - $f(x) = \sin x \longleftarrow$ تابع دوري دوره هو $\{\, T = 2\pi \,\}$ وذلك بملاحظة :

$$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi) \xrightarrow{\text{حسب الإرجاع الربع الأول}} =\sin x = f(x) \ ,\forall x$$

وبما أن العدد الحقيقي الموجب تماماً 2π هو أصغر عدد حقيقي موجب تماماً يحقق الشرط السابق فإن دور التابع السابق هو (2π) ..

2) - $f(x)=\tan x$ $\longleftarrow$ هو تابع دوري دوره π ..

3) - (k عدد ثابت) : $f(x)=k$ $\longleftarrow$ هو تابع دوري ولكن دوره غير معين وذلك بملاحظة الآتي :

إذاً دوري $\Longleftarrow$ $f(x+T)=k=f(x) \quad ,\forall\, x$

تعريف :

المتسلسلة المثلثية :

هي متسلسلة لها الشكل التالي : ⟨ المفصَّل ⟩

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos nx+b_1\sin nx)+(a_2\cos nx+b_2\sin nx)+\cdots$$
$$+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots$$

⟨ المختـزل ⟩

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

حيث : $(\, a_0 \,, a_n \,, b_n \,)$ أعداد حقيقية بحيث : $n\geq 1$

تعريف :

متسلسلة فورييه :

إن متسلسلة فورييه المقابلة للتابع $f(x)$ على المجال $I=[-\pi,+\pi]$ هي متسلسلة مثلثية تتعين أمثالها $(\, a_0 \,, a_n \,, b_n \,)$ حيث : $n\geq 1$

بدساتير فورييه التالية :

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{\pi}\,.\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).dx \\ a_n=\dfrac{1}{\pi}\,.\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\cos nx\,.dx \quad (n\geq 1) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\,.\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\sin nx\,.dx \quad (n\geq 1) \end{cases}$$

ومنه :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

وعندما يكون $f(x)$ مستمراً على المجال I .. نكتب :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

و هذه المتسلسلة مجموعها هو :

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = S(x)$$

<< تذكرة >>

$$\underbrace{f(x_0 - 0)}_{\text{النهاية من اليسار}} = \underbrace{f(x_0 + 0)}_{\text{النهاية من اليمين}} = \underbrace{f(x_0)}_{\text{الصورة}}$$

" انتهت المحاضرة " ....