ادرس قابلية اشتقاق الدالة

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{(x_0+\Delta x)\sin\frac{1}{x_0+\Delta x}-x_0\sin\frac{1}{x_0}}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{x_0\sin\frac{1}{x_0+\Delta x}+\Delta x\sin\frac{1}{x_0+\Delta x}-x_0\sin\frac{1}{x_0}}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\sin\frac{1}{x_0+\Delta x}+\frac{x_0\left(\sin\frac{1}{x_0+\Delta x}-\sin\frac{1}{x_0}\right)}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\sin\frac{1}{x_0+\Delta x}+x_0\frac{2\sin\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{2}\cos\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}+\frac{1}{x_0}}{2x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x_0+\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(x_0\cdot\frac{2\sin\frac{-\Delta x}{2x_0(x_0+\Delta x)}\cdot\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{x_0+\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{2x_0}{\Delta x}\sin\frac{-\Delta x}{2x_0(x_0+\Delta x)}\cdot\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2x_0(x_0+\Delta x)}\right)$$

$$=\sin\frac{1}{x_0}-\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2x_0(x_0+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{2x_0}\cdot\frac{1}{(x_0+\Delta x)}}\cdot\frac{\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2x_0(x_0+\Delta x)}}{(x_0+\Delta x)}\right]$$

$$=\sin\frac{1}{x_0}-1\cdot\frac{1}{x_0}\cos\frac{1}{x_0}=\sin\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0}\cos\frac{1}{x_0}$$

وبالتالي فإن الدالة f اشتقاقية عندما $x_0\neq 0$ ومن أجل $x_0=0$ نجد أن

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}$$

عدم تعين عند الصفر $\sin \infty$ وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر

- نناقش نهاية المتتالية $\left\{\frac{1}{1+a^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

اذا كانت $a>1$ ، $a=1$ ، $0\leq a<1$

$a=-1$

عندما $a=-1$ متباعدة لأن $(-1)^n$ متباعدة

عندما $a>1$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=\infty \Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=0$

عندما $a=1 \Leftarrow b_n=\frac{1}{1+(1)^n}=\frac{1}{2}$

فإن المتتالية متقاربة من العدد $(1/2)$

عندما $0\leq a<1$

$a=0$

$b_n=\frac{1}{1+0}=1$

متقاربة من (1)

$0<a<1$

$\lim a^n=0$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{1+0}=1$

متقاربة من العدد (1)

- انشر الدالة $f(x)=\sin x$ ، استنتج $\sin^2 x$ $\sin x^2$

$f(x)=\sin x$

الدالة f اشتقاقية على $\mathbb{R}$ لأكثر من مرة

$f(x)=\sin x$ $\quad f(0)=0$

$f'(x)=\cos x$ $\quad f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x$ $\quad f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x$ $\quad f'''(0)=-1$

$f^{(4)}(x)=\sin x$ $\quad f^{(4)}(0)=0$

/ /

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot\frac{x}{1!} + f''(0)\cdot\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\,\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + 0 \cdots$$

$$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

$$\sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(x^2)^{2n+1}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

نعلم أن

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \Longrightarrow$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2n!}$$

انتهت المحاضرة وانتهى المقرر

www.syriamath.net.

لا تنسونا من صالح دعائكم.