قسم الرياضيات

السنة الرابعة جبر

نظرية الشبكات

1

مكتبة ميموزين

Mimozeyn

الفصل الدراسي الثاني

E- Mail: Mimozeyn@yahoo.com

3 / 3 /2013-2014

القضية الرياضية :

هي جملة خبرية تقبل الصح والخطأ ولا يمكن أن تكون صحيحة وخاطئة بآن معاً

فمكن أن تكون صحيحة دوماً أو خاطئة دوماً أو صحيحة من أجل بعض الحالات وخاطئة من أجل حالات أخرى.

• الاستدلال : هو قضية صحيحة دوماً ، ونرمز لها بـ T (مثال : القضية $2<9$)

• التناقض : هو قضية خاطئة دوماً ، ونرمز لها بـ C (مثال : القضية $7<\sqrt{3}$)

- يتوقف كون القضية صحيحة أو خاطئة على الدراسة التي نقوم بها

- الجملة المفتوحة :

$A(x)$ جملة مفتوحة على المجموعة Ω : هي جملة تتحول إلى قضية عندما نعوض x من Ω

$\underline{x=\alpha}\in\Omega \Longrightarrow$ $A(\alpha)$ قضية

مثال :

لدينا $x^2-1<0$ جملة مفتوحة على $\mathbb{R}$

من أجل : $x\in]-1,+1[\subset\mathbb{R}$ فإن $x^2-1<0$ هي قضية صحيحة

من أجل : $x\in\mathbb{R}-]-1,+1[$ فإن $x^2-1<0$ هي قضية خاطئة

- الموضوعة :

هي قضية صحيحة تقبل دون برهان وتعتبر مبدءاً من مبادئ العلم .

مثل موضوعة إقليدس - الاختيار - زورن - هاوسدورف

- الأدوات الممكن استخدامها :

نفرض A و B قضيتان عندئذٍ :

- عندما نكتب $A \Rightarrow B$ فهذا يعني : إذا كانت القضية A صحيحة فإن القضية B صحيحة
- عندما نكتب $A \Leftrightarrow B$ فهذا يعني :
  - A شرط لازم وكافٍ لـ B
  - A صحيحة إذا وفقط إذا (عندما وفقط عندما) B صحيحة
  - A و B متكافئتان

وبرهان هذه الحالة يتضمن برهان كل من $(A \Rightarrow B)$ و $(B \Rightarrow A)$

- كل قضية A لها نفي $\sim A$ حيث $\sim A$ هي قضية تكون صحيحة عندما A خاطئة وتكون خاطئة عندما A صحيحة

* مبرهنة (١) :

لتكن A و B قضيتين ما، عندئذٍ : $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow ((\sim B) \Rightarrow (\sim A))$

الإثبات :

أ) الاتجاه الأول $\Rightarrow$:

لنفرض أن $(A \Rightarrow B)$ صحيحة ولنفرض أن $(\sim B)$ صحيحة علينا إثبات أن $(\sim A)$ صحيحة (وبالتالي تصبح $((\sim B) \Rightarrow (\sim A))$ صحيحة ومنه الاقتضاء الأول $\Rightarrow$ يصبح صحيحاً)

وذلك كما يلي :

لنفرض جدلاً أن $(\sim A)$ خاطئة عندئذٍ فإن $\sim(\sim A) = A$ تكون صحيحة ومنه فإن B تكون صحيحة (لأن $A \Rightarrow B$ صحيحة فرضاً) ومنه فإن $(\sim B)$ تكون خاطئة وهذا يناقض الفرض بأن $(\sim B)$ صحيحة، إذاً الفرض الجدلي خاطئ ومنه $\sim A$ صحيحة إذاً فإن $((\sim B) \Rightarrow (\sim A))$ صحيحة وبالتالي فإن الاقتضاء الأول $(A \Rightarrow B) \Longrightarrow ((\sim B) \Rightarrow (\sim A))$ محقق.

ب) الاتجاه الثاني $\Leftarrow$:

لدينا $((\sim B) \Rightarrow (\sim A))$ صحيحة وبالتالي $(\sim(\sim A) \Rightarrow \sim(\sim B))$ صحيحة حسب (أ) أي أن $(A \Rightarrow B)$ صحيحة ومنه فإن الاقتضاء الثاني محقق

إذاً $((\sim B) \Rightarrow (\sim A)) \Longrightarrow (A \Rightarrow B)$

* مبرهنة (ج): (الاستقراء الرياضي)

لتكن ع قضية تتبع لمتغير طبيعي مثل n، ولنفرض أن هذه القضية تتمتع بالخاصتين:

أ) يوجد عدد طبيعي مثل m بحيث تكون هذه القضية ع صحيحة من أجله

ب) إذا كان $n \geq m$ وكانت القضية ع صحيحة من أجل n فإن هذه القضية ع تكون صحيحة من أجل $n+1$

عندئذٍ: تكون القضية ع صحيحة من أجل جميع الأعداد الطبيعية التي هي أكبر أو تساوي m

الإثبات:

لنفرض جدلاً أنه يوجد عدد طبيعي مثل K بحيث يكون $K > m$ والقضية ع غير صحيحة من أجل K (الهدف هو الوصول إلى تناقض)

ولنأخذ المجموعة: $H = \{x \,/\, x \in \mathbb{N} \,,\, x \geq m \,,\, x < k+1\}$

مجموعة الأعداد الطبيعية التي هي أكبر أو تساوي m وأصغر تماماً من $K+1$

فنجد أن هذه المجموعة منتهية (لأنها مجموعة أعداد طبيعية (وليست حقيقية) محصورة بين m و $K+1$)

ونجد أيضاً أن $m \in H$ و $K \in H$

(H تحوي m حيث ع صحيحة من أجل m وأيضاً H تحوي K حيث ع خاطئة من أجل K

إذاً H يمكن أن تحوي قيم تجعل ع خاطئة) (*)

ثم لنأخذ المجموعة L (حيث L موجودة حسب *) المعرفة كما يلي:

$L = \{y \,/\, y \in H \,,$ (القضية ع غير صحيحة من أجل y) $\}$

فنجد أن L مجموعة منتهية من الأعداد الطبيعية (لأنها جزء من المجموعة المنتهية H)

وأنه بالتالي يوجد فيها عنصر مثل $z \in L$ بحيث يكون:

$z \leq y \;;\; \forall y \in L$ (أي أن z عنصر أصغر في L)

لدينا ما يلي:

$z \in L \subset H$ وبالتالي فإن ع غير صحيحة من أجل z ومنه فإن $z \neq m$

(لأن ع صحيحة من أجل m) ومنه فإن $z > m$

كما أنه لا يوجد أي عنصر من H (عدد طبيعي) أصغر تماماً من z وأكبر من m

بحيث تكون ع غير صحيحة من أجل هذا العنصر (لأن z هو عنصر أصغر في L)

ومنه يمكننا أن نكتب :

إن القضية ع تكون صحيحة من أجل العدد الطبيعي $z-1$ ($z-1$ طبيعي لأن z طبيعي)

والذي هو $z-1 \geq m$ (لأن $z > m$)

ومنه حسب الشرط الثاني ٢) المذكور في نص هذه المبرهنة ينتج أن القضية

ع تكون صحيحة من أجل $1+(z-1)$ أي أنها صحيحة من أجل العدد z

وهذا تناقض مع كون $z \in L$

إذاً الفرض الجدلي خاطئ ، ومنه فإن القضية ع صحيحة من أجل جميع الأعداد

الطبيعية التي هي أكبر أو تساوي m.

تمرين :

أثبت صحة القضية $n < 2^n$ وذلك بالاستقراء الرياضي على n

(هذه القضية صحيحة من أجل $n=0$ أي أن أول قيمة هي الصفر إذاً سنثبت $\forall n \in \mathbb{N}$)

الإثبات :

أ. من أجل $n=0$ فإن $0 < 2^0 = 1$ محققة إذاً القضية $n<2^n$ صحيحة من أجل العدد 0

ب. نفرض صحة القضية من أجل n (أي نفرض أن $n<2^n$ صحيحة)

ج. لنثبت صحتها من أجل $n+1$ ($n+1 \overset{?}{<} 2^{n+1}$)

$$n+1 < 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

حسب ب

حالة التساوي من أجل $n=0$ حيث $1=2^0$

إذاً $n+1 < 2^{n+1}$

ومنه القضية صحيحة من أجل $n+1$

مما سبق نجد أن القضية $n < 2^n$ صحيحة أياً كانت $n \geq 0$

ملاحظة جانبية :

١- لإثبات أن قضية ما صحيحة من أجل m بالاستقراء الرياضي

إما نفرض صحتها من أجل $n \geq m$ ونثبت صحتها من أجل $n+1$

أو نفرض صحتها من أجل $n-1 \geq m$ (أي أن $n > m$) ونثبت صحتها من أجل n

حيث هنا لو كانت $n \geq m$ عندئذ في حالة $n = m$ تكون $n-1 < m$ وهذا محال

(حيث هنا نطبق الشرط ٣ من نص مبرهنة الاستقراء الرياضي)

٢- القضية السابقة $n < 2^n$ مرتبطة بـ المجموعات

حيث من أجل أي مجموعة عدد عناصرها n فإن عدد عناصر مجموعة الأجزاء لهذه المجموعة

(وعددها يساوي 2^n) يكون أكبر تماماً من عدد عناصر المجموعة ذاتها (والذي يساوي n).

* المجموعة الشاملة نسبياً :

في كل علم توجد مجموعة شاملة نسبياً (نسبياً لأنها تتغير من علم لآخر) هذه المجموعة موجودة

ولو بشكل مستتر (أي حتى لو لم تذكر) ومثبتة

أي نفرض لدينا مجموعة كبيرة مثبتة ومجموعات جزئية منها عندئذٍ هذه الكبيرة هي مجموعة شاملة نسبياً

- لو أخذنا مثلاً المجموعة $B = \{1,2\}$ عندئذٍ من هذه المجموعة B يمكن تشكيل المجموعات :

مجموعات مبنية على B (مشكلة منها) $\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \ldots\ldots$

مجموعة عنصرها 1 ، مجموعة عنصرها المجموعة $\{1\}$

* مجموعة جميع المجموعات التي يمكن تشكيلها بناءً على B هي عنصر في نفسها

(لأنها جميعاً ذاتها تكون مبنية على B)

إذاً توجد هناك مجموعات بحيث تكون عناصر من نفسها

- نعرف مجموعة المجموعات الطبيعية : وهي مجموعة المجموعات التي لا تحوي نفسها .

مجموعة المجموعات غير الطبيعية : هي مجموعة المجموعات التي تحوي نفسها .

* تعريف المجموعة :

المجموعة لا تُعرَّف ولكننا نعطي وصفاً يكاد يكون تعريفاً لها :

أولاً : الصف

هو مفهوم بدائي (لا يعرف) ولكنه يوصف بأنه جملة أشياء معينة تعييناً تاماً، بحيث إذا أخذنا شيئاً ما فيمكننا القول أنه شيءٌ من هذه الجملة أو شيءٌ غريب عنها ، هذه الأشياء سنسميها عناصر.

ثانياً : المجموعة : هي صف بحيث يكون عنصراً في صف آخر.

(كل صف يكون عنصر في صف آخر فإنه يكون مجموعة)

* المجموعة الخالية ϕ موجودة $\phi \subseteq \Omega$ حيث Ω المجموعة الشاملة نسبياً

ملاحظة: كل قضية تتعلق بـ ϕ نثبتها باستخدام نقض الفرض.

* لدينا القضيتان التاليتان : $\begin{cases} \phi \text{ محتواة في أية مجموعة} \\ \phi \text{ وحيدة} \end{cases}$

سنثبتها كما يلي :

أ) ϕ محتواة في أية مجموعة : أي أنه لنفرض Ω المجموعة الشاملة نسبياً و $\forall B \subseteq \Omega$ فإن $\phi \subseteq B$

الإثبات :

لنفرض جدلاً أن $\phi \nsubseteq B$ عندئذٍ يوجد عنصر x من ϕ بحيث x لا ينتمي إلى B أي أنه :

$$\exists x \in \phi : x \notin B$$

وهذا غير ممكن لأن ϕ مجموعة خالية لا تحوي عناصر ، ومنه الفرض الجدلي خاطئ ، إذاً $\phi \subseteq B$

ب) ϕ وحيدة :

الإثبات : لنفرض جدلاً أنه توجد مجموعتين خاليتين مثل ϕ_1 و ϕ_2 عندئذٍ حسب أ) فإن

$\phi_1 \subseteq \phi_2$ (ϕ_1 خالية و $\phi_2 \subseteq \Omega$) وبنفس الوقت لدينا $\phi_2 \subseteq \phi_1$

ومنه فإن $\phi_2 = \phi_1$ وبالتالي المجموعة الخالية وحيدة.

ملاحظة جانبية :

$$A \subseteq B \underset{\text{بالتعريف}}{\overset{def}{\Longleftrightarrow}} \forall x \in \Omega : (x\in A \Rightarrow x \in B)$$

$$\Longleftrightarrow (\forall x\in A : x \in B)$$

انتباه: الكتابة $\forall x \in A \Rightarrow x\in B$ خاطئة

(مكمم الشمول $\forall$ والوجود $\exists$ إذا وجد أحدهما في جهة فإن الآخر موجود في نفيها)

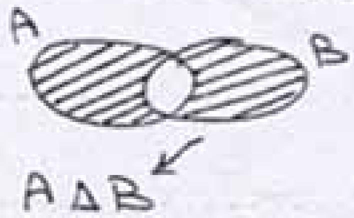
$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\in A : x \notin B$$

* $A\cap B = \{y / y\in A \wedge y \in B\}$ $\quad$ $A\cup B = \{x / x\in A \overset{\cdot}{\vee} x\in B\}$

$A\setminus B = \{x / x\in A \wedge x\notin B\}$ $\quad$ $A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$

حيث $A-B : A\setminus B$ (الفرق)

Δ هو الفرق التناظري :



* مجموعة أجزاء المجموعة M نرمزها بـ $S(M)$ وهي دوماً غير خالية لأن $\emptyset$ دوماً عنصر من $S(M)$

إذا أخذنا عنصرين A و B من $S(M)$ وعرفنا عليها Δ قانون الفرق التناظري، عندئذٍ

سنعرف بالتالي زمرة (أي أن $S(M)$ هي زمرة بالنسبة للفرق التناظري Δ)

وذلك لأن : Δ داخلي في $S(M)$: حيث $S(M) \ni A\Delta B$

Δ تبديلي : $A\Delta B = (A-B)\cup(B-A) = (B-A)\cup(A-B) = B\Delta A$

Δ يقبل عنصر حيادي هو $\emptyset$:

$A\Delta\emptyset = (A-\emptyset)\cup(\emptyset - A) = A\cup\emptyset = A$

$\emptyset\Delta A = \emptyset\cup A = A$

كل مجموعة يوجد لها نظير بالنسبة لـ Δ ألا وهي المجموعة نفسها :

$A\Delta A = (A-A)\cup(A-A) = \emptyset\cup\emptyset = \emptyset$

Δ تجميعي : $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$

(وإثبات ذلك يتم باستخدام جدول الحقيقة)

حيث : $A\setminus B = A\cap(\sim B)$, $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

A	B	C	$A\setminus B$	$B\setminus A$	$A\Delta B$	$(A\Delta B)\setminus C$	$C\setminus(A\Delta B)$	$(A\Delta B)\Delta C$
1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

A	B	C	$B\setminus C$	$C\setminus B$	$B\Delta C$	$A\setminus(B\Delta C)$	$(B\Delta C)\setminus A$	$A\Delta(B\Delta C)$
1	1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

نلاحظ أن القيم في عمودي $(A\Delta B)\Delta C$ و $A\Delta(B\Delta C)$ هي نفسها على الترتيب

إذاً $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ ومنه فإن Δ تجميعي .

* مثال على الاختزال في الزمرة، حيث $S(M)$ زمرة بالنسبة لـ Δ يمكننا كتابة : ($\Delta A = Y\Delta A \Rightarrow X=Y$)