Subject: 13/3/2014

# «المحاضرة الرابعة»

*- تمرين: [1].

- هل $\mathbb{Z}$ تام؟

- الحل: - لنبرهن أن كل متتالية كوشية من $\mathbb{Z}$ ستكون ثابتة وبالتالي متقاربة فتكون حينئذٍ تامة.

*- لتكن: $\{a_n\}_{n\geq 0}$ متتالية كوشية من $\mathbb{Z}$.. وبالتالي:

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : (n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$$

- لنختار: « $\varepsilon = \frac{1}{2}$ » - أو أي عدد من المجال $]0,1[$ -

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : (n, m \geq n_0 \Rightarrow \underbrace{|a_n - a_m|}_{\in \mathbb{N}} < \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow a_n - a_m = 0 \Rightarrow \{a_n\}_{n\geq 0}$$

متتالية ثابتة وبالتالي متقاربة..

$\Leftarrow$ $\mathbb{Z}$ تامة.. #

*- تمرين: [2].

- هل $\mathbb{Q}$ تام؟

- الحل: - لإثبات أن $\mathbb{Q}$ ليست تامة يكفي إيجاد متتالية $\{a_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{Q}$ بحيث تكون متقاربة من $\mathbb{R}$.. أي أن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

وغير متقاربة من $\mathbb{Q}$..

أي: $\lim a_n = a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

$\Leftarrow$ المتتالية كوشية «لأنها متقاربة من $\mathbb{R}$» .. ولكنها غير متقاربة من $\mathbb{Q}$ «لأن $a \notin \mathbb{Q}$»..

$\Leftarrow$ $\mathbb{Q}$ ليست تامة..

- لنأخذ مثلاً: $a_n = (1+\frac{1}{n})^n \ ; \ n \geq 1$

Subject: / /

فنلاحظ أن: " $a_n \subset Q$ " وذلك $(\forall n \geq 1)$ .. ولكنّ:

$$a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} e \ \wedge \ e \notin Q$$

إذاً $Q$ ليست تامة.

- مثال آخر: $Q \supset b_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ .. بيّنّا أنّ:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = e \ \text{(قاعدة)}}$$

$$b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} e \Rightarrow Q \text{ غير تامة}$$

## * التوابع المستمرة على $R$ .. " Present functions "

* تعريف: - لتكن:

$$f : R \to R$$

ولتكن: $x_0 \in R$ .. عندئذٍ:

$$(f \text{ مستمر عند } x_0) \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$$

$$\Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 : x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ = I'$$
$$\Rightarrow f(x) \in ]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[ = I\}$$

$$\Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 ; f(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \subset$$
$$]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ من أجل كل مجال مفتوح $I$ .. مركزه $f(x_0)$، يوجد مجال مفتوح مركزه $x_0$ مثل $I'$ .. محقق: " $f(I') \subset I$ " ..

*- مبرهنة :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مستمر إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة من المستقر $\mathbb{R}$ هي مجموعة مفتوحة من المنطلق $\mathbb{R}$ ..

- الإثبات : "$\Rightarrow$"

« لبرهان أن $f$ مستمر يكفي إثبات أنه من أجل أي مجال مفتوح $I$ مركزه $f(x_0)$ يوجد مجال مفتوح $I'$ مركزه $x_0$ .. ويحقق : $f(I')\subset I$ » - وذلك $\forall x_0\in\mathbb{R}$ -

*- لتكن $I$ أي مجال مفتوح مركزه $f(x_0)$ .. عندئذٍ : $I$ مجموعة مفتوحة وبالتالي (حسب الفرض) فإنّ : $\overleftarrow{f}(I)$ .. هي مجموعة مفتوحة ..

ولكن: $x_0\in \overleftarrow{f}(I)$ ، لأن : $f(x_0)\in I$ ..

وبالتالي : « بما أن : $(\overleftarrow{f}(I))$ مفتوحة »

$$\Rightarrow \exists r>0 : ]x_0-r,x_0+r[\subset \overleftarrow{f}(I)$$

$$\Rightarrow f(]x_0-r,x_0+r[=I')\subset I$$

$\Leftarrow$ $f$ مستمر عند $x_0$ وذلك $(\forall x_0\in\mathbb{R})$ ..

$\Leftarrow$ $f$ مستمر على $\mathbb{R}$ قاطبةً .. #

| |
|---|
| "$\Leftarrow$" تذكرة: الصورة العكسية : $\overleftarrow{f}(I)=\{x\in\underset{\text{المنطلق}}{\mathbb{R}} : f(x)\in I\}$ |

*- لتكن $f$ مستمر على $\mathbb{R}$ .. ولتكن $A$ مجموعة مفتوحة من المستقر $\mathbb{R}$ ..

ولنبرهن على أن : $\overleftarrow{f}(A)$ .. هي مجموعة مفتوحة من المنطلق $\mathbb{R}$ ..

- لتكن : $x\in\overleftarrow{f}(A)$ .. ولنبرهن على أن $x$ تصلح لأن تكون مركز لمجال مفتوح محتوى في الصورة العكسية لـ $A$ - $\overleftarrow{f}(A)$ -

عندئذٍ : بما أنّ :

Subject: / /

ومنها (A مفتوح) $\Leftarrow f(x) \in A$ (حسب التعريف) $\Leftarrow x \in \overleftarrow{f}(A)$

$\exists r>0 : ]f(x)-r, f(x)+r[ = I \subset A$

ـ وبما أن: f مستمر عند x فإنه «حسب التكافؤ (*) من التعريف»
يوجد مجال مركزه x ويحقق:

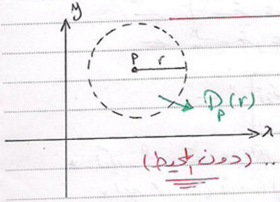
$f(I') \subset I \quad : I = ]f(x)-r, f(x)+r[ \subset A$

$\Rightarrow I' \subset \overleftarrow{f}(A) \Rightarrow$ مفتوح من الظرف $\overleftarrow{f}(A)$

وبالتالي تم المطلوب .. #

*ـ تبولوجيا المستوي ... «تبولوجيا $R^2$» ..

*ـ القرص المفتوح من $R^2$ : (open disc) ..




ـ سوف نرمز للقرص المفتوح $D_p(r)$ ..
حيث $p \in R$ «مركزه» ..
وَ $r>0$ «نصف قطره» ..
وهو المنطقة الواقعة تماماً داخل
الدائرة التي مركزها p ونصف قطرها r .. (دون محيط)

«مقارنة بين $R$ و $R^2$»

*ـ القرص المفتوح:
$R^2 \ni (x_1, x_2) \in D_p(r) \Leftrightarrow D_p(r)$.
ـ بعد x عن p أصغر تماماً من (r) ..

*ـ المجال المفتوح:
$R \ni x \in ]a-r, a+r[ \Leftrightarrow ]a-r, a+r[$
ـ بعد x عن a أصغر تماماً من (r)

** التعريف :

$P=(x_0,y_0) \Rightarrow$

$D_p(r)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\}$

** التعريف :

$a\in\mathbb{R}$ «نقطة» $\Rightarrow$

$]a-r,a+r[=\{x\in\mathbb{R}^2 : |x-a|<r\}$

---

* إن القرص المفتوح في $\mathbb{R}^2$ يلعب دوراً مماثلاً للمجال المفتوح في $\mathbb{R}$ ..
وذلك بتعريف كل من المفاهيم التالية :

- النقاط الداخلية لـ $A\subset\mathbb{R}^2$ ..
- المجموعة المفتوحة في $\mathbb{R}^2$ ..
- نقاط التجمع لـ $A\subset\mathbb{R}^2$ ..
- المجموعة المغلقة في $\mathbb{R}^2$ ..

* تعريف :

- النقاط الداخلية لـ $A\subset\mathbb{R}^2$ -

- لتكن : $x\in A\subset\mathbb{R}^2$ ، عندئذٍ :

( $x$ نقطة داخلية لـ $A$ ) $\Leftrightarrow$ (يوجد قرص مفتوح محتوى في $A$ .. بحيث يكون مركزه هو النقطة $x$ )

$\Leftrightarrow$

$(\exists r>0 : D_x(r)\subset A)$

* سنرمز بـ $A^\circ$ لمجموعة كل النقاط الداخلية في $A$ ..

* تعريف :

- المجموعة المفتوحة في $\mathbb{R}^2$ -

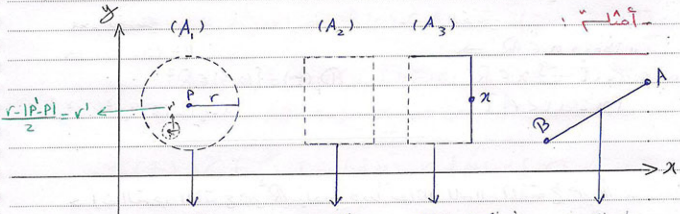
$A=A^\circ \Leftrightarrow$ ( $A\subset\mathbb{R}^2$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^2$ )

$\Leftrightarrow$ كل نقاط المجموعة $A$ داخلية .

$\Leftrightarrow (\forall x\in A ,\ \exists r>0 : D_x(r)\subset A)$.

Subject:

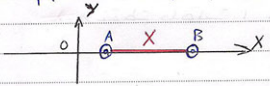
- أمثلة :




| غير مفتوحة | غير مفتوحة | مفتوحة | مفتوحة |
|---|---|---|---|
| | «لأن (x) تنتمي للمجموعة $A_3$ ولا يمكن أن تكون مركزاً لأي قرص محتوى داخل $A_3$» | «لأن كل نقطة داخل الشكل تصلح أن تكون مركزاً لقرص محتوى داخل $A_2$» | «لأن كل نقطة داخل القرص تصلح أن تكون مركزاً لقرص محتوى داخل $A_1$» |

«مثال هام»

- لتكن : $A, B \in \overrightarrow{OX}$ ، ولتكن X مجموعة نقاط القطعة المستقيمة AB .. دون الأطراف A, B ..




- إن X غير مفتوحة من $\mathbb{R}^2$ ..
ولكنها مفتوحة من $\mathbb{R}$ «لأنها مجال مفتوح» ..

* التفسير الهندسي : لا يمكن إيجاد نقطة من المجموعة السابقة بحيث تصلح لأن تكون مركزاً لقرص مفتوح محتوى من X ..

Subject: ........ / /

*- تعريف :

- نقاط التراكم لـ $A \subset \mathbb{R}^2$ -

$x \in \mathbb{R}^2$ نقطة تراكم لـ $A \subset \mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow$ «كل قرص مفتوح مركزه $x$ سوف يتقاطع مع $A / \{x\}$ بنقطة واحدة على الأقل» ..

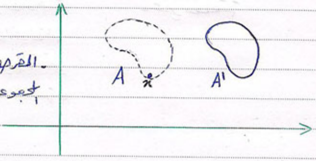
$$\Leftrightarrow$$

$$\forall r>0 ;\ D_x(r) \cap (A/\{x\}) \neq \emptyset$$

- وسوف نرمز بـ $A'$ لمجموعة كل نقاط التراكم للمجموعة $A$ ..

*- تمرين : - منزلي -

= أثبت أن : $(x \in A') \Leftrightarrow (\forall r>0 ;\ |D_x(r) \cap A| = \infty)$




- القرص الذي مركزه $x$ سيتقاطع مع المجموعة بعدد لانهائي من النقاط ..

*- ملاحظة : - يمكن جعل $(r)$ صغير جداً بحيث تقاطع القرص مع $A$ هو القرص نفسه .

*- نتائج :

[1] - $\emptyset, \mathbb{R}^2$ .. مفتوحتين ومغلقتين في آن معاً .. وهما الوحيدتان كذلك

لا يوجد فيها نقاط تخص الحدود

[2] - تقاطع عدد منتهي من المجموعات المفتوحة (في $\mathbb{R}^2$) مجموعة مفتوحة (في $\mathbb{R}^2$) ..

عدد محدود أو غير محدود

[3] - الاجتماع (الكيفي) لمجموعات مفتوحة (في $\mathbb{R}^2$) هو مجموعة مفتوحة (في $\mathbb{R}^2$) ..

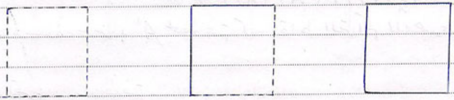
[4] - الاجتماع (المنتهي) للمجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة .

Subject:

[5] - التقاطع (الكثير) للمجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة

- الإثبات: - يترك مؤقتاً -

«مثال»..



- مغلقة
- غير مفتوحة
«لأن أي نقطة من المحيط تنتمي للمجموعة»

- غير مفتوحة
- غير مغلقة

- مفتوحة
- ليست مغلقة
«لأن متممتها غير مفتوحة»