«المحاضرة الرابعة»

1-3-3- مبرهنة:

- لتكن R ، ك حلقتين واحديتين ، إذا كان: $\varphi : R \longrightarrow \text{ك}$ تشاكل حلقي غامر فإن: — في الحالة العامة ليس بالضرورة تحقق ① و② «والعكس»

1- $\varphi(1_R) = 1_{\text{ك}}$. — ذلك مثالاً مخالفاً؟ ... أما كونه غامر يجعل

2- R تبديلية $\Leftarrow$ ك تبديلية . — الشرطين محققين

الإثبات:

1- $\forall \text{ك} \in \text{ك} ; \exists r \in R : \varphi(r) = \text{ك}$ «لأن φ غامر»

عندئذٍ:

$*$- $\text{ك} \cdot \varphi(1) = \varphi(r) \cdot \varphi(1) \overset{\text{تشاكل}}{=} \varphi(r \cdot 1) = \varphi(r) \Rightarrow$ حيادي يميني

$**$- $\varphi(1) \cdot \text{ك} = \varphi(1) \cdot \varphi(r) = \varphi(1 \cdot r) = \varphi(r) \Rightarrow$ حيادي يساري

«وبما أن $\varphi(1)$ حيادي يميني ويساري $\Leftarrow$ هو حيادي في ك»

«وبما أن الحيادي وحيد فيكون:

$$1_{\text{ك}} = \varphi(1_R)$$

#

2- $\forall \text{ك}_1, \text{ك}_2 \in \text{ك} ; \exists r_1 \wedge r_2 \in R : \text{ك}_1 = \varphi(r_1) \wedge \text{ك}_2 = \varphi(r_2)$

- نعلم أنه: تكون ك تبديلية عندما يكون الضرب تبديلي -

$\Rightarrow *$- $\text{ك}_1 \cdot \text{ك}_2 = \varphi(r_1) \cdot \varphi(r_2) \overset{\text{تشاكل}}{=} \varphi(r_1 \cdot r_2) \overset{R\ \text{تبديلية}}{=} \varphi(r_2 \cdot r_1)$

$\overset{\text{تشاكل}}{=} \varphi(r_2) \cdot \varphi(r_1) = \text{ك}_2 \cdot \text{ك}_1$

$\Leftarrow$ ك تبديلية .

#

Subject:

1-3-4 .. تعريف : « التماثل الحلقي » .

- نقول عن التشاكل الحلقي أنه تماثل حلقي إذا وفقط إذا كان هذا التشاكل متباينًا وغامرًا .. أي : $\varphi: R \to S$ تشاكل وتقابل ⇐ φ تماثل .. ونرمز لذلك بالرمز : « $R \cong S$ » .

*- ملاحظة :

- ليس بالضرورة أن يكون كل تقابل هو تماثل ، وأكبر مثال على ذلك : التماثل المنطقي - وعلى سبيل المثال : المستقيم والمستوي « حيث أن بعد المستقيم 1 بينما بعد المستوي 2 » ..

2*- المناطق التكاملية ومميّز الحلقة :

2-1 .. المناطق التكاملية :

2-1-1 - تعريف :

- لتكن R حلقة و $0 \neq a \in R$ عندئذٍ :

*- نقول إن a قاسم صفري يميني إذا وفقط إذا تحقق :

$\exists b \in R : b \neq 0 \wedge b.a = 0$

**- نقول إن a قاسم صفري يساري إذا وفقط إذا تحقق :

$\exists b \in R : b \neq 0 \wedge a.b = 0$

***- يكون a قاسم صفري ، إذا كان قاسمًا صفريًا يمينيًا ويساريًا .

****- نقول عن الحلقة R أنها منطقة تكاملية « Integral Domain » إذا وفقط إذا تحقق :

- R حلقة واحدية ، تبديلية و خالية من القواسم الصفرية ..

ونرمز لها بالرمز .. « ID » ..

Alamal Notebook

* - أمثلة :

1 - $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ منطقة تكاملية ..

2 - $(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ ليست منطقة تكاملية ، لأنها : ليست واحدية على الرغم من أنها تبديلية و خالية من القواسم الصفرية ..

3 - $(\mathbb{Z}_8,\oplus,\otimes)$ ليست منطقة تكاملية ، لأنها تبديلية و واحدية وتحوي قواسم صفرية هي $(2,4)$ حيث : $(2).4=0 \wedge (4).2=0$.

4 - $R=(M_2(R),+,\cdot)$ ليست منطقة تكاملية ، لأنه :

- ليكن :

$$0 \neq a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in R$$ - العنصر الصفري -

$$\Rightarrow \exists b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in R : a.b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

← a هو قاسم صفري يساري ..

5 - ليكن P عدد أولي ، عندئذٍ : $(\mathbb{Z}_p,\oplus,\otimes)$ منطقة تكاملية ..

- نتيجة هامة : « عند n عدد أولي من المجموعة $\mathbb{Z}_n$ .. تكون $\mathbb{Z}_p$ منطقة تكاملية »

- التفسير : تفسير إثبات

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}_p ; a.b=0 \Rightarrow P \mid a.b \Rightarrow$$ « حسب إقليدس »

إما : $P/a \vee P/b \Rightarrow a=0 \vee b=0$ in $\mathbb{Z}_p$.

← $\mathbb{Z}_p$ خالية من القواسم الصفرية .. أي أن $\mathbb{Z}_p$ هي ID ..

#

مثال . $\overset{\text{6(0)}}{}$ in $\mathbb{Z}_6$ ← $2.3 = 2.6 = 0$

$\not\Rightarrow 3 = 6 = 0$

← قانون الاختصار يتحقق فقط في المناطق التكاملية .

التي تكون الخالية من القواسم الصفرية .

Subject: / /

2-1-2 .. مبرهنة :

- لتكن R حلقة ، عندئذٍ : R هي خالية من القواسم الصفرية إذا وفقط إذا تحقق الآتي :

$\forall a,b,c \in R : a \neq 0$ فـ

$*$- $ab = ac \Rightarrow b = c$

$**$- $ba = ca \Rightarrow b = c$

« الإثبات » .. " $\Leftarrow$ "

$*$- لنفرض أن R حلقة خالية من القواسم الصفرية ولنثبت أن :

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

- لنفرض أن :

$$ab = ac \Rightarrow ab - ac = a(b-c) = 0$$

$$\overset{a\neq 0 \text{ فرضاً}}{\Longrightarrow} (b-c) = 0 \Rightarrow b = c$$

«الإماثة على صفر أو الثاني» بما أن R خالية من القواسم الصفرية

#

$**$- بالمثل نبرهن الشرط الثاني .. لنفرض أن :

$$ba = ca \Rightarrow ba - ca = (b-c)a = 0$$

$$\underset{a\neq 0}{\Longrightarrow} (b-c) = 0 \Rightarrow b = c \quad \#$$

" $\Rightarrow$ "

- لنفرض أن الشرطين صحيحين ، ولنثبت أن R خالية من القواسم الصفرية .. عندئذٍ :

- لتكن : $R \ni a \neq 0$ .. ولنفرض أن :

$$a.b = 0 = a.0 \overset{(**) \text{ حسب}}{\Longrightarrow} «b = 0»$$

$\Leftarrow$ a ليس قاسم صفري ..

أي أن : R خالية من القواسم الصفرية ..

#

Subject: / /

★ - تمرين [1] - لتكن R حلقة ذات عنصر محايد ، وخالية من القواسم الصفرية ،
أثبت أن :

[1] - إذا تحقق : $a^2 = a$ حيث $a \in R$ فإن :
$a = 0 \lor a = 1$

[2] - إذا تحقق : $a^2 = a$ حيث : مهما كان $a \in R$ .. فإن :
R منطقة تكاملية .

حيث ★ - تمرين [2] - بيّن أنه : كل حقل هو منطقة تكاملية ، وأن العكس
ليس صحيحاً بالضرورة .. «المثال المعاكس» $(Z, +, \cdot)$

منطقة تكاملية ⟸ ليس حقل

مثال ذلك : Z_7 منطقة منتهية ⟸ حقل .

2_1_3 - مبرهنة :

- إذا كانت R منطقة تكاملية منتهية فإن : R حقل .

«الإثبات» ..

- لدينا من الفرض ، أن R منطقة تكاملية أي أن : R حلقة تبديلية
ومحايدة ، وحينئذٍ : لنثبت أن لكل عنصر غير صفري يوجد مقلوب
فيتم المطلوب .

- ليكن : $0 \neq a \in R$ .. ولنعرف العلاقة :

$$\varphi : R \to R$$

$$: \forall r \in R ; \varphi(r) = a \cdot r$$

لا نستثني الصفر ؟؟ غير φ

- لنثبت أن : φ تقابل ..

★ - φ تطبيق لأن :

هنا الكلام صحيح بشرط $a \neq 0$ أي عدم وجود قواسم صفرية حلقة قانون الاختصار محقق .

$$\forall r_1, r_2 \in R ; r_1 = r_2 \Rightarrow a r_1 = a r_2$$

$$\Rightarrow \varphi(r_1) = \varphi(r_2)$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ تطبيق}$$

Subject: / /

**- φ متباين لأن:

$$\forall r_1, r_2 \in R \,;\, \varphi(r_1) = \varphi(r_2) \Rightarrow a.r_1 = a r_2$$
$$\Rightarrow r_1 = r_2$$

**- φ غامر لأن:

- عا أن R منتهية و φ متباين فيكون عندئذٍ φ غامر.

$\Leftarrow$ وحسب φ تقابل.

لأن الواحد موجود في المستقر ويوجد له مقابل في المنطلق.

$$\Rightarrow (\underset{\text{المستقر}}{1} \in R) \Rightarrow \exists r \in R : \varphi(r) = 1 \Rightarrow a.r = 1$$

- وعا أن R حلقة إبدالية فإن:

$$a.r = r.a = 1$$

ومنه a قابل للقلب .. وبالتالي: R حقل.

#

#