3. كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة ومعطى خطي:

تعريف: لتكن $A \in M_n(\mathbb{K})$ مصفوفة مربعة من الرتبة n وعناصرها من الحقل $\mathbb{K}$. نسمي كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A بالشكل:

$$P_A(x) = \det(xI - A)$$

حيث I المصفوفة الواحدية في $M_n(\mathbb{K})$.

لتكن $L : V \longrightarrow V$ مؤثراً خطياً.

نسمي كثيرة الحدود المميزة للمؤثر L بالشكل:

$$P_L(x) = \det(xI - A)$$

حيث A مصفوفة L بالنسبة للقاعدة المرتبة في V.

I المصفوفة الواحدية.

مثال: أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

الحل:

$$P_A(x) = \det(xI - A)$$

$$= \det\left(x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & -1 \\ -1 & -2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= (x-1)(x^2-1-2) + (-1) = (x-1)(x^2-3) - 1$$

$$= x^3 - 3x - x^2 + 3 - 1 = x^3 - x^2 - 3x + 2$$

$$\boxed{P_A(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2}$$

مثال: أوجد كثيرة الحدود المميزة للمؤثر الخطي

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$L(x, y, z) = (x + y - z, x, y + z, 2z)$$

أ) نوجد مصفوفة L بالنسبة للقاعدة الثانية في $\mathbb{R}^2$، لكن $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ثلاث، لقاعدة، لقانونية:

$$L(e_1) = L(1,0,0) = (1,1,0) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3$$
$$L(e_2) = L(0,1,0) = (1,1,0) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3$$
$$L(e_3) = L(0,0,1) = (-1,1,2) = -1e_1 + 1e_2 + 2e_3$$
$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_L(x) = \det(xI - A) =$$
$$\det\left(x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$
$$P_L(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = 0 - 0 + (x-2)\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix}$$
$$= (x-2)(x^2 - 2x + 1 - 1) = (x-2)(x^2 - 2x)$$
$$= x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x$$
$$P_L(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

ملاحظة: درجة كثيرة الحدودية المميزة لمصفوفة مربعة من الرتبة n هي n ثلاث.
- إذا كان A متجانسا مع تشابه في فضاء شعاعي ذي بعد n فإن درجة كثيرة الحدودية المميزة n.

ملاحظة 2: إن أشكال كثيرة الحدودية المميزة هو نفسه أي كثيرة الحدودية المميزة هي كثيرة الحدودية واحدية
أشكال كثيرة الدرجة $(n-1)$ تساوي ناقص $(Tr(A))$ // Tr الأثر // وهو مجموع عناصر القطر الرئيسي
$(n-1) = -Tr(A)$

تعريف: نقول عن مصفوفتين $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ أنهما متشابهتان (A تشابه B، B تشابه A) إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة S قابلة للقلب بحيث $B = S^{-1}AS$