Subject: .... 6/ 3 /2014

« المحاضرة الثانية »

* نقاط التجمع (التراكم) أو (النهاية) لمجموعة :
.. accumulation (limit) Point ..

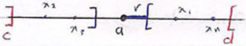
- مبرهنة وتعريف :
لتكن $A \subset \mathbb{R}$ ، $a \in \mathbb{R}$ .. « a ليست بالضرورة تنتمي للمجموعة A » ..
عندئذٍ :
نقول عن a أنها نقطة تجمّع (تراكم) (نهاية) للمجموعة A إذا حققت أحد الشروط المتكافئة الآتية :

$\boxed{1}$ - كل مجال مفتوح يحوي (a) يحوي نقطة على الأقل من المجموعة $A/\{a\}$.
$\boxed{2}$ - كل مجال مفتوح يحوي (a) يحوي عدد لانهائي من نقاط المجموعة $A/\{a\}$.
$\boxed{3}$ - توجد متتالية غير ثابتة $\{a_n\}_{n\geq 1}$ من عناصر A .. بحيث : $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

الإثبات :
$\boxed{1} \Leftarrow \boxed{2}$ .. واضح ..
$\boxed{2} \Leftarrow \boxed{1}$
- لنفرض جدلاً أن $\boxed{2}$ خاطئ .. أي أنه : « يوجد مجال مفتوح يحوي a ويحوي عدد منتهي من نقاط $A/\{a\}$ » ولتكن هذه النقاط هي :
.. $x_1, x_2, \dots, x_n$
ولكن :
$$r = \min\{|a - x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$$

$$\Rightarrow]a-r, a+r[\cap (A/\{a\}) = \varnothing$$
مما يناقض الفرض $\boxed{1}$ .. وبالتالي :
الفرض الجدلي خاطئ .. ⇐ الاقتضاء
$\boxed{1} \Leftarrow \boxed{2}$ صحيح .. #

.. ((توضيح)) ..
$\{x_1, \dots, x_n\} =]c, d[\cap A/\{a\}$



- نأخذ (r) على أنها أصغر بعد بين a وأحد النقاط من المجموعة المنتهية $\{x_1, \dots, x_n\}$
وبسبب اختيار (r) لن يحوي المجال $]a-r, a+r[$ أي نقطة من $A/\{a\}$

Alamal

$\boxed{1} \Leftarrow \boxed{3}$ ..

- لنفرض أن $\boxed{3}$ صحيحة .. ولنثبت أن: « كل مجال مفتوح يحوي (a) يحوي نقطة واحدة على الأقل من المجموعة $A/\{a\}$ .. »

عندئذ: « من تعريف نهاية متتالية » ..

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ $\Longleftrightarrow$ كل مجال مفتوح يحوي a يحوي جميع حدود المتتالية ما عدا عدد منتهٍ منها

$\Longleftrightarrow$ كل مجال مفتوح يحوي كل عناصر المجموعة $\{a_n : n\geq 1\}\subset A$ ما عدا عدد منتهٍ منها

*- وبما أن $\{a_n\}_{n\geq 1}$ غير ثابتة $\Leftarrow$ كل مجال مفتوح يحوي نقطة واحدة على الأقل من عناصر المجموعة $A \supset \{a_n : n\geq 1\}$ ..

وبذلك يتم المطلوب .. #

$\boxed{3} \Leftarrow \boxed{1}$ ..

- لنفرض أن $\boxed{1}$ محقق .. ولنكن المجال $]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}[$ عندئذ: حسب (1) نجد أن:

$$]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}[\cap (A/\{a\}) \neq \emptyset$$

*- لنختار x_n - نقطة ما - من هذا المجال .. عندئذ: من أجل كل $n\geq 1$ .. نلاحظ أن:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{1}\ x_n \neq a \ , \ \forall n\geq 1 \\ \boxed{2}\ a-\frac{1}{n} < x_n < a+\frac{1}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \ 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow |x_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow x_n - a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \Rightarrow \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

وهي غير ثابتة لأن: $x_n \neq a , \forall n\geq 1$ .. وبذلك تم المطلوب . #

Subject: / /

* ملاحظة: سوف نرمز (A') لمجموعة كل نقاط التجمع (التراكم) للمجموعة A.

* أمثلة:

1- $A=\{\frac{1}{n} : n\geq 1\}$ .. أي أن: $A=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

- نلاحظ أن: $\frac{1}{n} \to 0$
$n \to \infty$

وبالتالي: كل مجال مركزه (0) سيحوي جميع عناصر A ماعدا عدد منتهي منها.

وبالتالي: (0) نقطة تجمع .. أي أن: $0 \in A'$

كما أن: (0) هي نقطة التجمع الوحيدة لـ A $\Leftarrow$ $A'=\{0\}$ ..

« توضيح » .. لنأخذ مثلاً المجال $]-0.1, +0.1[$ .. مركزه هو الصفر..
فنلاحظ أن:
الحدود التالية خارج المجال..
$a_1, a_2, \dots, a_{10} \notin]-0.1, +0.1[$
أما الحدود الباقية فكلها داخل المجال..

$$\Rightarrow A / \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\} = \{a_{11}, a_{12}, \dots\} \subset]-0.1, +0.1[$$

2- $A =]a, b]$ ..

- إن كل جوار لـ b مثل: $]b-r, b+r[$ سيحوي عدد لانهائي من نقاط المجموعة $A / \{b\}$ ..

- وإن كل جوار لـ a مثل: $]a-r', a+r'[$ سيحوي عدد لانهائي من نقاط المجموعة $A / \{a\}$ ..

$$\Rightarrow a, b \in]a, b]'$$

Subject: .... / /

وكذلك .. كل $x \in]a,b]$ .. تحقق ذلك .. أي أن: $\forall x \in]a,b]'$

$$\Rightarrow \ ]a,b]' = [a,b]$$

13 - $[a,b[' = [a,b]$

14 - $A =]-1,+1[$ « تذكر مثال (5-9) »

نلاحظ أنه: $5 \notin]-1,+1['$ .. لأنه: يوجد مجال $]5-1,5+1[=]4,6[$

بحيث: $]4,6[\cup]-1,+1[= (]4,6[/ 5) \cap]-1,+1[= \emptyset$

$$\Rightarrow]-1,+1[' = [-1,+1]$$

15 - $\{a_1, \dots, a_n\}' = \emptyset$ «« لأنه لا يوجد أي مجال مفتوح تتقاطع مع عدد غير منتهي من النقاط مع المجموعة »»

.. « لأنها نقاط منتهية حتى لن تتجمع بجوار أي نقطة منها » ..

16 - $\mathbb{Z}' = \emptyset$ « A' أصغر من A »

17 - $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$ « $A' = A$ »

18 - $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ « A' أكبر من A »

« الإثبات » .. طريقة <u>1</u>

* - $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ .. لأنه من أجل كل $a \in \mathbb{R}$ .. وكل مجال مفتوح $]a-r,a+r[$ ..

فإنه: « بسبب كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$ »

$$\Rightarrow]a-r,a+r[\cap (\mathbb{Q}/\{a\}) \neq \emptyset$$

« أي كل نقطة من $\mathbb{R}$ تصلح لأن تكون نهاية لمتتالية من $\mathbb{Q}$ »

« تذكرة » ..

$\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ بين كل عددين من $\mathbb{R}$ يوجد عدد من $\mathbb{Q}$

$\Leftrightarrow$ كل عنصر $a\in \mathbb{R}$ يصلح لأن يكون نهاية لمتتالية أعداد من $\mathbb{Q}$. $\{a_n\}_{n\geq 1}$

#

طريقة <2>

$$\forall a\in \mathbb{R} \xRightarrow{\text{كثيفة في } \mathbb{R}\ \mathbb{Q}} \exists \{a_n\}_{n\geq 1}\subset \mathbb{Q} : \lim_{n\to+\infty} a_n = a$$

$$\xRightarrow[\text{تعريف نقطة التراكم}]{\text{حسب 3 من}} \underset{\text{نقطة تراكم}}{a}\in \mathbb{Q}' \Rightarrow \mathbb{R}\subset \mathbb{Q}' \wedge (\mathbb{Q}'\subset \mathbb{R}) \text{ فرضاً}$$

$$\Rightarrow \text{« } \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \text{ »}$$

#

* تمارين :

أوجد مجموعة نقاط التراكم لكل من المجموعات التالية :

1 - $\left\{\frac{2n+3}{n+1} : n\geq 1\right\}$, 2 - $\left\{\frac{(-1)^n\cdot 3n}{2n+7} : n\geq 0\right\}$

$\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{n+1}$

3 - $\left\{\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{-4}{5}, \dots\right\}$, 4 - $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

5 - $[1,2[\ \cup \{3\}$, 6 - $\left\{\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) : n\geq 1\right\}$

* مبرهنة : « Bolzano Weierstrass »

- كل $A\subset \mathbb{R}$ « محدودة وغير منتهية » $\Leftarrow A'\neq\emptyset$

* تقبل دون برهان .

Subject: / /

*** نتيجة :**

- كل متتالية محدودة .. تملك متتالية جزئية متقاربة ..

- الإثبات : ينتج من البرهنة السابقة بحيث - نفرض A متتالية -

((من أجل A هي مجموعة متتالية ← (محدودة وغير منتهية) ← متقاربة ← لها مجموع $\supset A'$ ← $A' \neq \emptyset$))

\#