Subject: 10/3/2014

« المحاضرة الأولى »

* مفاهيم أساسية:

1.1 تعريف [1]:

- لتكن R مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل $(+)$ و $(\cdot)$.
نقول عن البنية الجبرية $(R,+,\cdot)$ أنها حلقة إذا فقط إذا تحقق ما يلي:

[1]- $(R,+)$ زمرة تبديلية.

[2]- $(R,\cdot)$ نصف (شبه) زمرة.

[3]- الضرب توزيعي على الجمع.. أي أن:

$$\forall a,b,c \in R ; \; a.(b+c) = ab + ac$$
$$(b+c).a = ba + ca$$

تعريف [2]:

- نقول عن الحلقة $(R,+,\cdot)$ أنها تبديلية إذا فقط إذا تحقق:
$$\forall a,b \in R ; \; ab = ba$$

تعريف [3]:

- نقول عن الحلقة $(R,+,\cdot)$ أنها حلقة واحدية (ذات عنصر محايد).. إذا فقط إذا تحقق:
$$\exists e \in R : \forall a \in R ; \; a.e = e.a = a$$
ونرمز له بالرمز (1) وندعوه واحد الحلقة.

تعريف [4]:

- نقول عن النظام الرياضي (البنية الجبرية) $(R,+,\cdot)$ أنها حقل إذا فقط إذا تحقق:

[1]- R حلقة تبديلية واحدية.

[2]- $\forall a \in R/\{0\} ; \exists b \in R : a.b = 1 \iff b = a^{-1}$

وندعو a^{-1} مقلوب العنصر a..

Subject: / /

*- أمثلة :

1- $R_1 = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ - هي حلقة تبديلية واحدية .

2- $R_2 = (M_n(R), +, \cdot)$ - هي حلقة واحدية وليست تبديلية .
- لأن ضرب المصفوفات غير تبديلي -

3- $R_3 = (2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .. هي حلقة تبديلية وليست واحدية .

4- $R_4 = (\mathbb{Z}_5, \oplus, \otimes)$ .. هي حلقة تبديلية وواحدية .

5- لتكن P عدد أولي - ولنعرف المجموعة :

$$Q(\sqrt{P}) = \{ a + b\sqrt{P} : a, b \in Q \}$$

بالشكل التالي :

$$\forall x = a_1 + b_1\sqrt{P} \wedge y = a_2 + b_2\sqrt{P} \in Q(\sqrt{P})$$

فـ
$$\begin{cases} x + y = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{P} \\ x \cdot y = (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 P) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{P} \end{cases}$$

إنّ : $(Q(\sqrt{P}), +, \cdot)$ حلقة تبديلية وواحدية .
بالمحايد ضربا هو .. (1) ـ « $1 + 0\sqrt{P}$ » ..

6- $\left.\begin{matrix} (Q, +, \cdot) \\ (R, +, \cdot) \\ (C, +, \cdot) \end{matrix}\right\}$ كل منها حقل .

Subject: .... / /

2-1-1 مبرهنة :

- لتكن : $(\mathbb{R},+,\cdot)$ حلقة .. عندئذٍ القضايا التالية صحيحة :

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$;

$\boxed{1}$ - $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

$\boxed{2}$ - $a \cdot (-b) = -ab = (-a)b$

$\boxed{3}$ - $(-a)(-b) = ab$

$\boxed{4}$ - $a(b-c) = ab - ac$

الإثبات :

$\boxed{1}$ - $0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a \Rightarrow$

$0 \cdot a - 0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a - 0 \cdot a \Rightarrow$

$0 = 0 \cdot a$

وبالمثل نبرهن أن : «$a \cdot 0 = 0$» #

$\boxed{2}$ - $a \cdot (-b) = 0 + a(-b) = ab - ab + a(-b)$

$= -ab + a(b-b) = -ab + a(0)$

$= -ab$

وبالمثل نبرهن أن : «$-ab = (-a)b$» #

$\boxed{3}$ - $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = a \cdot b$ #

$\boxed{4}$ - $a(b-c) = ab + a(-c) = ab - ac$ #

- تمرين - وظيفة - :

*- إذا كانت $(\mathbb{R},+)$ زمرة .. فإنّ : $(\mathbb{R},-)$ زمرة .

#