Subject: 10 / 3 / 2014

« المحاضرة الثالثة »

*المجموعة المغلقة في $\mathbb{R}$ .. (closed set) ..

- تعريف :

- نقول عن المجموعة $A \subset \mathbb{R}$ أنها مغلقة في $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كانت متممتها $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ .. مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ ..

.. « أمثلة » ..

- ليكن : $a, b \in \mathbb{R}$ .. بحيث $a < b$ ..

$\boxed{1}$ - $A =]-\infty, a] \cup [b, +\infty[\Rightarrow A^c =]a, b[\Rightarrow$ مفتوحة A^c
$\Rightarrow$ مغلقة A

$\boxed{2}$ - $A = [a, b] \Rightarrow A^c =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\Rightarrow$ مفتوحة A^c
$\Rightarrow$ مغلقة A

*- نتيجة : « كل مجال مغلق هو مجموعة مغلقة »

$\boxed{3}$ - $A = \{a\} \Rightarrow A^c =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[\Rightarrow$ مفتوحة A^c
$\Rightarrow$ مغلقة A

$\boxed{4}$ - $A = \emptyset \Rightarrow A^c = \mathbb{R} \Rightarrow$ مفتوحة $A^c \Rightarrow$ مغلقة $A = \emptyset$

$\boxed{5}$ - $A = \mathbb{R} \Rightarrow A^c = \emptyset \Rightarrow$ مغلقة $A^c \Rightarrow$ مغلقة $A = \mathbb{R}$

$\boxed{6}$ - $A = [a, b[\Rightarrow A^c =]-\infty, a[\cup [b, +\infty[\Rightarrow$ غير مفتوحة A^c
$\Rightarrow$ غير مغلقة A

Subject: / /

*- ملاحظة : الاقتضائيتين التاليتين غير صحيحين :

A غير مفتوحة $\Leftarrow$ A مغلقة ..
A غير مغلقة $\Leftarrow$ A مفتوحة ..

وذلك لأنه : - من الممكن أن تكون المجموعة A مفتوحة و مغلقة في آن معاً
مثل : $\emptyset$ ، $\mathbb{R}$ ..
و - من الممكن أن تكون المجموعة A غير مفتوحة و غير مغلقة في آن معاً
مثل : $A = [a, b[$ ..

*- مبرهنة :

[1] - اجتماع أي عدد منتهي من المغلقات (المجموعات المغلقة) هو مغلق .
[2] - تقاطع أي جماعة من المغلقات هو مغلق .

- الإثبات :
[1] - لتكن : $A_1, A_2, \dots, A_n$ .. مجموعات مغلقة (في $\mathbb{R}$) ..
وبالتالي : $A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c$ .. مجموعات مفتوحة (في $\mathbb{R}$) ..
- من نتيجة سابقة -
$A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c \rightarrow$ «مجموعة مفتوحة»
- من قانون دمورغان -
$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c \rightarrow$ «مجموعة مفتوحة»

$\Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \rightarrow$ مجموعة مغلقة #

[2] - لتكن : $\{A_i : i \in I\}$ .. جماعة من المجموعات المغلقة .. عندئذٍ :
$\{A_i^c : i \in I\}$ .. مجموعة مفتوحة ..

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ (مغلقة من [1])

$\Rightarrow (\bigcup_{i\in I} A_i)^c$ (مفتوحة) $\Leftarrow$ من دمورغان

$\bigcap_{i\in I} A_i^c$ (مفتوحة) $\xRightarrow{\text{متممتها}}$ $\bigcap_{i\in I} A_i$ (مغلقة) #

*- نتيجة: « كل مجموعة منتهية من R .. سوف تكون مغلقة في R »

- التفسير: لأن المجموعة: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ عبارة عن اتحاد مجموعات مغلقة و« من المبرهنة السابقة » ..

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a_1\}\cup\{a_2\}\cup\dots\cup\{a_n\}$$

« هي مجموعة مغلقة »

*- مبرهنة:

$A\subset R$ مغلقة $\Leftrightarrow A'\subset A$ ..

- بعبارة أخرى:

تكون $A\subset R$ مغلقة إذا وفقط إذا كانت مجموعة نقاط التراكم محتواة في المجموعة عينها .. ، أي المجموعة مغلقة عندما وفقط عندما تحوي كل نقاط تراكمها.

- الإثبات: " $\Leftarrow$ "

- الفرض: (A مغلقة) أي (A^c مفتوحة)

- المطلوب: ($A'\subset A$) أي ($\forall x\in A' \Rightarrow x\in A$)

أي ($x\notin A \Rightarrow x\notin A'$)

= عندئذٍ: (لأن: $(\sim P\Rightarrow \sim q)\Leftrightarrow(q\Rightarrow P)$)

- لنفرض أن: A^c مفتوحة .. وأن $x\notin A$ .. ولنبرهن على أن:

$x\notin A'$ ..

Subject: / /

عندئذٍ: بما أنّ:

$x \notin A \Rightarrow x \in A^c \wedge$ (A^c مفتوحة فرضاً)

$\Rightarrow \exists r > 0 :]x-r, x+r[\subset A^c \Rightarrow$

$\exists r > 0 :]x-r, x+r[\cap A = \emptyset$

- حيث أن: $A = A / \{x\}$ .. لأن: $x \notin A$

راجع مسودة

$\Rightarrow x \notin A'$. #

" $\Rightarrow$ "

- الفرض: $(A' \subset A) \Leftrightarrow (\forall x \in A' \Rightarrow x \in A)$

$\Leftrightarrow (\forall x \notin A \Rightarrow x \notin A')$

- الطلب: (A مغلقة) أي (A^c مفتوحة) ..

- عندئذٍ:

- لنفرض أن: $(A' \subset A)$ .. ولنبرهن أن: A^c مجموعة مفتوحة ..

* - لنفرض جدلاً أن: (A^c غير مفتوحة)، أي أن:

يوجد $x \in A^c$ .. ولا يصلح لأن يكون مركزاً لأي مجال مفتوح محتوى في A^c .. أي أن:

$\exists x \in A^c : \forall r > 0$ ؛ $]x-r, x+r[\notin A^c$

$\Rightarrow \exists x \in A^c : \forall r > 0$ ؛ $]x-r, x+r[\cap A \neq \emptyset$

- حيث أن: $A = A / \{x\}$ .. لأن: $x \notin A$ ..

$\Rightarrow x \in A^c \overset{\text{فرضاً}}{\subset} A \Rightarrow x \in A \wedge x \in A^c$

$\Rightarrow x \in A \cap A^c \wedge A \cap A^c = \emptyset \Rightarrow$ تناقض

$\Leftarrow$ الفرض الجدلي خاطئ .. $\Leftarrow$ A^c مفتوحة .

#

// $a \in [a,b] \wedge a \notin]a,b] \Rightarrow$ ليست مغلقة //
لأنه يجب أن تحوي المجموعة كل نقاط تجمعها لتكون مغلقة. //

Subject: / /

★- تمرين: بيّن أي من المجموعات التالية مغلقة .. بالاستفادة من المبرهنة السابقة:

[1]- $A = [a,b[\Rightarrow A' = [a,b] \not\subset A = [a,b[$
$\Rightarrow A = [a,b[$ ليست مغلقة

[2]- $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\} \Rightarrow A' = \{0\} \not\subset A$
$\Rightarrow A$ غير مغلقة

[3]- $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots\} \Rightarrow A' = \{0\} \subset A \Rightarrow A$ مغلقة

[4]- $A = \mathbb{Z}$

طريقة [1]- باستخدام المبرهنة..

$\Rightarrow A' = \emptyset \subset \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}$ مغلقة

طريقة [2]- باستخدام التعريف..

$\Rightarrow \mathbb{Z}^c = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[\Rightarrow \mathbb{Z}^c$ مفتوحة $\Rightarrow \mathbb{Z}$ مغلقة

[5]- $A = Q \Rightarrow Q' = \mathbb{R} \not\subset Q \Rightarrow Q$ غير مغلقة

[6]- $\mathbb{R}/Q \;,\; \mathbb{R}^*, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*}$

.. «مخفية» ..

★- المجموعات التامة في $\mathbb{R}$ ..

.. «تمهيد» .. - تعريف المتتالية الكوشية -

$(\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon) \Longleftrightarrow$ كوشية $\{a_n\}_{n \geq 1}$

Subject: / /

- مبرهنة سابقة -

$\{a_n\}_{n\geq 1}$ كوشية $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ متقاربة .. «في $\mathbb{R}$» ..

* ملاحظة هامة :

- لتكن : $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset X \subset Y \subset \mathbb{R}$ ..

$\boxed{1}$ - إن كون : $\{a_n\}_{n\geq 1}$ كوشية لا تتعلق بالمجموعة التي تحتويها .. أي أن :

.. $\{a_n\}_{n\geq 1}$ كوشية في X $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ كوشية في Y ..

$\boxed{2}$ - قد تكون : $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in Y / X$ .. وعندها سوف نقول أن

المتتالية $\{a_n\}_{n\geq 1}$ متقاربة في Y .. من a .. ومتباعدة في X ..

.. «مثال» : لتكن لدينا المتتالية :

$$\{a_n\}_{n\geq 1} = \{\tfrac{1}{n}\}_{n\geq 1} \in]0,1] \subset [0,1]$$

وبالتالي :

$\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ متقاربة في المجال $[0,1]$ ومتباعدة في المجال $]0,1]$

كما نلاحظ أن : المتتالية $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ كوشية .. بيد أنها غير متقاربة في المجال $]0,1]$ ..

* - تعريف :

- نقول عن مجموعة $A \subset \mathbb{R}$ .. أنها تامة .. إذا كانت كل متتالية كوشية من عناصر A متقاربة إلى عنصر من A ..

Subject: / /

«مثال» ..

1 - $\mathbb{R}$ .. مجموعة تامة ..

2 - $A = [a,b[$ .. غير تامة .. لأنّ :

توجد المتتالية : $n \geq 1$: $x_n = b - \frac{b-a}{n} \in [a,b[$ ..

بحيث لو عوضنا قيماً لوجدنا التالي :

$x_1 = a \quad , \quad x_2 = \frac{b+a}{2} \quad , \quad \ldots\ldots$

والحد العام حينئذٍ :

$$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b \notin [a,b[$$

$\Leftarrow \{x_n\}_{n \geq 1}$ متتالية كوشية لأنها متقاربة في $\mathbb{R}$ «وكل متقاربة كوشية»

ولكنها ليست متقاربة في المجال $[a,b[$ ..

ومنه نستنتج أن المجموعة $[a,b[$ غير تامة .. #

* تمرين : - واجب -

1 - أثبت أنه إذا كانت $\{a_n\}_{n \geq 1}$ متتالية كوشية فإنه يوجد : $n_0 \in \mathbb{N}^*$

يحقق :

$n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{1}{2}$ عندما

2 - استنتج أن كل متتالية كوشية من عناصر $\mathbb{Z}$ سوف تكون ثابتة .

#