« المحاضرة الأولى »

- مقدمة في الفضاءات التبولوجية العامة -

- الفضاء المتجهي :

- لتكن X مجموعة غير خالية . مزودة بقانوني تشكيل . داخلي $(+)$ وخارجي $(\cdot)$ - الضرب بعدد - . حيث أن :

*- قانون التشكيل الداخلي $(+)$. يحقق الآتي :

1. $\forall x, y \in X$ ؛ $(x+y) \in X$
2. $\forall x, y, z \in X$ ؛ $(x+y)+z = x+(y+z)$
3. $\forall x \in X$ ؛ $\exists\, 0_X \in X : x + 0_X = 0_X + x = x$
4. $\forall x \in X$ ؛ $\exists\, (-x) \in X : x + (-x) = (-x) + x = 0_X$
5. $\forall x, y \in X$ ؛ $x + y = y + x$

- عندئذٍ نقول عن الثنائية $(X, +)$ أنها زمرة تبديلية .

*- قانون التشكيل الخارجي $(\cdot)$. المعرف بالشكل :

$$(\cdot) : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$$
$$(\alpha, x) \longmapsto \alpha \cdot x$$

يحقق ما يلي :

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in X$ ؛ $(\alpha \cdot \beta) x = \alpha (\beta x)$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in X$ ؛ $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in X$ ؛ $\alpha (x+y) = \alpha x + \alpha y$
4. $\forall x \in X$ ؛ $\exists\, 1_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R} : 1_{\mathbb{R}} \cdot x = x$

- عندئذٍ نقول عن الثلاثية $(X, +, \cdot)$ أنها فضاء متجهي .

*- ملاحظة: لا يمكن أن تكون X مجالاً «بشكل عام» - مغلق أو مفتوح - لأنها ليست مغلقة بالنسبة لعملية الجمع.

حيث أن: جمع عددين حقيقيين من هذا المجال قد لا ينتمي إليه.

« مثال » $\boxed{1}$.

- لنرمز بـ: $\mathbb{R}^n$ لمجموعة كل المرتبات n من الأعداد الحقيقية، والتي تكتب بالشكل:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad ; \quad x_i \in \mathbb{R} \wedge (i = 1, \dots, n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad ; \quad y_i \in \mathbb{R} \wedge (i = 1, \dots, n)$$

- فإذا عرفنا عمليتي الجمع والضرب (بعدد حقيقي α) بالدستورين الآتيين:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha . x = (\alpha . x_1, \alpha . x_2, \dots, \alpha . x_n)$$

- أثبت أن: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ فضاء متجهي.

الإثبات: أولاً (+):

$\boxed{1}$- (+) داخلية في $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{2}$- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ؛

$$(x + y) + z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) + (z_1, \dots, z_n)$$
$$= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \dots, x_n + y_n + z_n)$$

- مع أن الجمع في $\mathbb{R}$ تجميعي -

$$\Rightarrow (x + y) + z = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n))$$
$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)$$
$$= x + (y + z)$$

$\boxed{3}$- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ؛ $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

Subject: / /

$$= (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) = y + x$$

$\Leftarrow$ R^n تبديلي ..

[4]_ $\forall x \in R^n ; \exists 0_{R^n} : x + 0_{R^n} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0)$

$$= (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0)$$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$$

ـ وبما أن : R^n تبديلي فإن :

$$0_{R^n} + x = x$$

[5]_ $\forall x \in R^n ; \exists (-x) \in R^n : x + (-x) = (x_1 - x_1, \ldots, x_n - x_n)$

$$= (0, \ldots, 0)$$
$$= 0_{R^n}$$

$\Leftarrow$ $(R^n, +)$ زمرة تبديلية ..

ثانياً (•) :

[1]_ $\forall \alpha, \beta \in R, \forall x \in R^n ; (\alpha . \beta) x = (\alpha . \beta)(x_1, \ldots, x_n)$

$$= \alpha (\beta x_1, \ldots, \beta x_n)$$
$$= \alpha [\beta (x_1, \ldots, x_n)]$$
$$= \alpha (\beta x)$$

[2]_ $\forall \alpha, \beta \in R, \forall x \in R^n ;$

$$(\alpha + \beta) x = (\alpha + \beta)(x_1, \ldots, x_n)$$
$$= [(\alpha + \beta) x_1, \ldots, (\alpha + \beta) x_n]$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n)$$

* جمع معادلة مستقيم مع معادلة تقاطع مكانين يعطي معادلة تقاطع مكانين، وذلك بتعويض معادلة المستقيم في معادلة التقاطع ..

Subject: .... / /

$$= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \dots, \beta x_n)$$
$$= \alpha x + \beta x$$

$\boxed{3}$ - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$; $\alpha(x+y) = \alpha(x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$
$$= (\alpha(x_1+y_1), \dots, \alpha(x_n+y_n))$$
$$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n)$$
$$= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \dots, \alpha y_n)$$
$$= \alpha x + \alpha y$$

$\boxed{4}$ - $\forall x \in \mathbb{R}^n$; $\exists 1_{\mathbb{R}} : 1 . x = (1x_1, \dots, 1x_n)$
$$= (x_1, \dots, x_n)$$
$$= x$$

$\Leftarrow$ $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ فضاء متجهي ..

#

$\boxed{2}$ - ((مثال))

- لتكن المجموعة $X = C[a,b]$ .. هي مجموعة كل الدوال الحقيقية والمستمرة للمتغير الحقيقي t المعرف على المجال $[a,b]$ ..

ولنعرف على هذه المجموعة العمليتين $(+)$ و $(\cdot)$ كما يلي:

$\boxed{1}$ - $\forall f, g \in C[a,b]$; $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$; $t \in [a,b]$

$\boxed{2}$ - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in C[a,b]$; $(\alpha f)(t) = \alpha . f(t)$

Subject: .... / /

ـ الفضاء المتجهي الجزئي:

ـ نقول عن $U \in X$: أنه فضاء متجهي جزئي .. إذا وفقط إذا كانت U مغلقة (جبرياً) ـ بالنسبة للعمليتين $(+) \wedge (\cdot)$ ـ $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_K \in U \quad \wedge \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_K \cdot x_K \in U$$

ـ الفضاء المنظم: $\|\cdot\|$ ..

ـ النظيم: هو دالة حقيقية معرفة على فضاء متجهي X .. أي:

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\|$$

بحيث:

ـ ويحقق الشروط التالية:

1. $\forall x \in X \ ; \ \|x\| \geq 0$
2. $\forall x \in X \ ; \ \|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\forall x \in X \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} \ ; \ \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
4. $\forall x, y \in X \ ; \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ـ متراجحة المثلث

$\Leftarrow$ $(X, \|\cdot\|)$ فضاء منظم ـ

«مثال» $\boxed{1}$ ـ

ـ ليكن الفضاء المتجهي الخطي $\mathbb{R}^n$ .. ولنعرف عليه دالة النظيم $\|\cdot\|$

كما يلي:

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

ـ برهن أن: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ فضاء منظم ـ

Subject: .... / /

البرهان:

1- $|x_i| \geqslant 0 \,, \forall i = 1,2,\dots,n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geqslant 0 \Rightarrow \|x\| \geqslant 0 \quad : \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2- $\forall x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0$

$$\Leftrightarrow |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0 \,, \forall i = 1,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow x_i = 0 \,, \forall i = 1,2,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \,, x_2 = 0 \,, \dots, x_n = 0 \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= (0,0,\dots,0)$$

$$= 0_{\mathbb{R}^n}$$

3- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R} ; \|\alpha . x\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha . x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha| . |x_i|$

$$= |\alpha| . \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\alpha| . \|x\|$$

4- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n ; \|x + y\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$$

$$\leqslant \|x\| + \|y\|$$

$\Leftarrow$ $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ فضاء منظم.

#

Alamal

Subject: / /

«مثال» .. 2 ..

- لنرمز بـ ℓ^{∞} لمجموعة كل المتتاليات الحقيقية والمحدودة بمعنى أن :

$$x \in \ell^{\infty} \Rightarrow x = \{x_i\}_{i \geq 1} \wedge |x_i| \leq c_x \; : \; c_x \in \mathbb{R}$$

ولنزود ℓ^{∞} بعمليتي (+) و (.) الآتيتين :

$$= \; x + y = \{x_i\}_{i \geq 1} + \{y_i\}_{i \geq 1} = \{x_i + y_i\}_{i \geq 1}$$

$$= \; \alpha . x = \alpha . \{x_i\}_{i \geq 1} = \{\alpha . x_i\}_{i \geq 1}$$

عندئذٍ :

1 - أثبت أن $(\ell^{\infty}, +, .)$ فضاء متجهي ..

2 - أثبت أن المساواة التالية : « $\|x\| = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}^*} |x_i|$ »
تحدد نظيماً على ℓ^{∞} .

الإثبات : - وظيفة -

- تذكرة : «أصغر حد أعلى»

$$\sup A = \alpha \Leftrightarrow \text{1}- \; \forall x \in A \; , \; x \leq \alpha$$

$$\text{2}- \; \forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists x_0 \in A \; ; \; x_0 > \alpha - \varepsilon$$

- ملاحظة :

*- يمكن أن نعرف على ذات الفضاء أكثر من نظيم ..

«مثال» .. 3 ..

- لنأخذ $X = C[a,b]$ - فضاء كل الدوال المعرفة والمستمرة على المجال $[a,b]$ ..
- وجدنا أن : $(C[a,b], +, .)$ فضاء متجهي حقيقي .. ولنعرف المسائل التاليتين :

Subject: / /

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \quad \wedge \quad \|x\|_2 = \int_a^b |x(t)|\,.dt$$

حيث أن: $x \in [a,b]$.

- أثبت أن، $(X, \|.\|_1)$ فضاء منظم ..
- أثبت أن $(X, \|.\|_2)$ فضاء منظم ..

الاثبات، ... متعب.

#