Subject: 11/ 3 /2014

« المحاضرة الثانية »

1.1.3 - مبرهنة :

- لتكن R حلقة .. و $a, a_1, a_2, \ldots, a_n \wedge b_1, b_2, \ldots, b_n \in R$ .. عندئذ :
القضايا التالية صحيحة :

$\boxed{1}$ $a . \sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{m} a . b_i$

$\boxed{2}$ $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) . b = \sum_{i=1}^{n} (a_i . b)$

$\boxed{3}$ $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i . b_j$

- الإثبات :

$\boxed{1}$ بالإستقراء الرياضي على m :

(*) - من أجل « m = 1 » .. نجد : $a . \sum_{i=1}^{1} b_i = a . b_1$ .. ← « محققة »

(**) - نفرض صحة العلاقة من أجل « m-1 » .. أي أن :

« $a . \sum_{i=1}^{m-1} b_i = \sum_{i=1}^{m-1} a . b_i$ » صحيحة ..

(***) - نثبت صحة القضية من أجل « m » ..

بفرض أن :

$$c = \sum_{i=1}^{m-1} b_i \ \wedge \ d = b_m$$

$$\Rightarrow a . \sum_{i=1}^{n} b_i = a . \left(\sum_{i=1}^{m-1} b_i + b_m\right) = a . (c + d) = ac + ad$$

$$= a . \sum_{i=1}^{m-1} b_i + a . b_m = \sum_{i=1}^{m-1} a . b_i + a . b_m$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a . b_i \quad \#$$

$\boxed{2}$ - بالاستقراء الرياضي أيضاً .. على n .. يتم المطلوب .. #

Subject: / /

3 - بتطبيق 1 و 2 .. يتم المطلوب .. #

1.1-4 .. مبرهنة

- لتكن R حلقة . و $a,b\in R$. عندئذٍ القضايا التالية صحيحة :

$\boxed{1}$ - $\forall m\in\mathbb{Z}\ ;\ (ma)b = m(ab) = a(mb)$

$\boxed{2}$ - $\forall m,n\in\mathbb{Z}\ ;\ (ma)(nb) = m.n(ab)$

$\boxed{3}$ - $\forall m,n\in\mathbb{Z}^{+}$ ؛ $\begin{cases} a^{n}.a^{m} = a^{n+m} \\ (a^{n})^{m} = a^{n.m} \end{cases}$

- الإثبات :

$\boxed{1}$ - نميز حالتين :

(*) - $((m\geq 0)) \Leftarrow$

$$(m.a)b = (\overbrace{a+a+\dots+a}^{m\ \text{مرة}}).b$$
$$= \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{m\ \text{مرة}} = m(ab)$$

(**) - $((m<0)) \Leftarrow$

$\exists n\in\mathbb{Z} : n=-m \Rightarrow m=-n \Rightarrow$

- عاأن : $(R,+)$ زمرة . فإن : $(R,-)$ زمرة .

وكذلك . حسب الحالة (*) نجد :

$$(na)b = n(ab) \Rightarrow (ma)b = (-na)b = -(na)b$$
$$= -(n(ab)) = -n(ab)$$
$$= m(ab)$$

- وبالمثل نبرهن على أن : $a(mb) = m(ab)$

#

12 - "تطبيق عن 11" :

$$(ma)(nb) = m\,(a(nb)) = mn\,(ab)$$

3 - بالاستقراء الرياضي على m :

(*) - من أجل "$m=1$" .. نجد أن : "$(a^n)^1 = a^n = a^{n\cdot 1}$" محققة

(**) - نفرض أن القضية صحيحة لأجل "$m-1$" : أي أن ..
"$(a^n)^{m-1} = a^{n\cdot(m-1)}$" - صحيحة ..

(***) - نبرهن صحتها لأجل m :

$$(a^n)^m = (a^n)^{m-1}(a^n)^1 = a^{n(m-1)}\cdot a^n$$

.. حسب الخاصية "$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$"

$$\Rightarrow (a^n)^m = a^{n(m-1)+n} = a^{nm-n+n} = a^{n\cdot m}$$

//

وبالمثل نبرهن الخاصة الثانية ..

1.1 - 5 .. تعريف :

- لتكن R حلقة واحدية .. نقول عن العنصر $a\in R$ أنه قابل للقلب إذا، فقط إذا تحقق :

$$\exists b \in R : ab = ba = 1$$

- نرمز لمقلوب العنصر a بالرمز a^{-1} ..

- نرمز لمجموعة كل العناصر القابلة للقلب في R بالرمز $U(R)$ -

Unit Ring

* - أمثلة :

1 - $R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ، $U(R) = \{\pm 1\}$

جبر بولي
Subject: أعلى الأولي ٤٢

$U(R) = \{1,5\}$ ، $R = (Z_6, \oplus, \otimes)$ - [2]

$U(R) = Q/\{0\}$ ، $R = (Q, +, \cdot)$ - [3]

$U(R) = \{$ كل العناصر ما عدا الصفر لأن p عدد أولي $\}$ ، $R = (\{Z_p^{U(p)}, \oplus, \otimes)$ - [4]

١.١.٥ - مبرهنة .. تعريف .
- لتكن R حلقة ، إن القضايا الآتية صحيحة
[1] - إذا كانت R حلقة واحدية .. فإن : $(U(R), \cdot)$ زمرة .

[2] - إذا تحقق : « $a^2 = a$ » وذلك أياً كان العنصر $a \in R$. فإن :
R حلقة تبديلية .
« تدعى هذه الحلقة بـ : « Boolean - Ring » - لأن كل عنصر فيها سيادي مرجع »

- الإثبات :
[1] - « نثبت أنها غير خالية »
بما أن R واحدية $\Leftarrow$ $1.1 = 1$ $\Leftarrow$ $1 \in U(R)$
$\Leftarrow U(R) \neq \emptyset$

« نثبت أنها داخلية « مغلقة »

$$- \forall a,b \in U(R) \; ; \; \exists c,d \in R : ac = ca = bd = db = 1$$

« بما أن R حلقة ، $ab \in R$ $\Leftarrow$ تجميع »

$$(ab)(dc) = a(bd)c = a.1.c = a.c = 1 \Rightarrow \text{تابل للقلب}$$
$$(dc)(ab) = d(ca)b = d.1.b = db = 1 \Rightarrow \text{تابل للقلب}$$

$\Leftarrow$ dc هو مقلوب ab .. ومنه : $a.b \in U(R)$ ..

- $\forall a \in U(\mathbb{R})\ ;\ 1.a = a \ \wedge\ a.1 = a \Rightarrow$ 1 هو المحايد في $U(\mathbb{R})$

"النظير"

- $\forall a \in U(\mathbb{R})\ ;\ \exists b \in U(\mathbb{R}) : ba = ab = 1 \Rightarrow a^{-1} = b \ \wedge\ a^{-1} \in U(\mathbb{R})$

"التجميع"

- $\forall a,b,c \in U(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}\ ;\ (a.b).c = a.(b.c)$

تجميعية $\Leftarrow$

- مما سبق نجد أن : $(U(\mathbb{R}), .)$ زمرة . #

- $\boxed{2}$

$\forall a,b \in \mathbb{R} : a^2 = a \ \wedge\ b^2 = b$

لنأخذ :

$(a+b) = (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$

$\Rightarrow (\cancel{a}+\cancel{b}) = \cancel{a} + ab + ba + \cancel{b} \Rightarrow$ "$ab = -ba$"

- ليتم المطلوب يجب أن نبرهن على أن كل عنصر يساوي نظيره الجمعي .

$\Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}\ ;\ (\cancel{c}+c) = (c+c)^2 = (c+c)(c+c)$
$= c^2 + c^2 + c^2 + c^2$
$= \cancel{c} + \cancel{c} + c + c \Rightarrow$ "$c = -c$"

وبالتالي : "$ab = ba$" $\Leftarrow$ $\mathbb{R}$ حلقة تبديلية #

* - تمرين $\boxed{1}$:

- بيّن أيًّا من البنى الجبرية التالية تمثل حلقة تبديلية واحدية ، وأيًّا منها تمثل حقل ..

$\boxed{1}$ - $(n.\mathbb{Z}, +, .)$, $\boxed{2}$ - $(\mathbb{Z}^+, +, .)$

[3]- $(2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$, [4]- $(\mathbb{Z}(\sqrt{2}), +, \cdot)$

[5]- $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$

*- تمرين [2]

- أوجد العناصر القابلة للقلب من كلاً من الحلقات الآتية :

[1]- $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$, [2]- $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \otimes)$

[3]- $(\mathbb{Z}_7, \oplus, \otimes)$, [4]- $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$

[5]- $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$

#