« المحاضرة الأولى »

* تبولوجيا المستقيم .. « تبولوجيا R » ..

- ليكن $]a,b[$ مجال ماخي $\mathbb{R}$ .. سندعو $x_0 = \frac{a+b}{2}$ * مركز المجال ..
وسندعو $r = \frac{a-b}{2}$ .. نصف قطر المجال .. عندئذٍ نلاحظ أن :

« $x_0 + r = b$, $x_0 - r = a$ »

وبالتالي : $]a,b[=]x_0-r, x_0+r[$ .. كما أن :

$$\forall x \in]x_0-r, x_0+r[\iff x_0 - r < x < x_0 + r$$
$$\iff -r < x - x_0 < +r$$
$$\iff \underbrace{|x - x_0|}_{} < r$$

« المسافة بين x و x_0 »

* تذكرة :

- نهاية متتالية بلغة «ε» إبسيلون :

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \iff \lim_{n \to \infty} a_n = a$$

$$\iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$$

$$\iff$$

* مهما تكن $\varepsilon > 0$ .. فإنه يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث تكون :

$$a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots\ldots \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$$

$$\iff$$

* كل مجال مفتوح .. مركزه (a) - نهاية المتتالية - سوف يحوي على جميع حدود المتتالية باستثناء عدد منته منها ..

- أطراف المجالات ليست نقاط داخلية

$\not\subseteq$

$\subset \Leftrightarrow \subseteq$

Subject: / /

*- النقطة الداخلية في مجموعة :

- تعريف :

- لتكن : $x \in A \subset \mathbb{R}$ ، نقول عن x أنها نقطة داخلية في A إذا حققت أحد الشرطين المتكافئين التاليين :

1 - يوجد $r>0$ .. بحيث : $]x-r, x+r[\subset A$.

2 - يوجد $b, a \in \mathbb{R}$ .. بحيث : $x \in]a,b[\subset A$.

دائماً $A^\circ \subset A$

*- سوف نرمز A° لمجموعة كل النقاط الداخلية في A ..

- تمرين : أثبت أن التكافؤ السابق صحيح ..

- وظيفة -

* أمثلة :

1 - لنأخذ المجموعة $A =]a,b]$ $\Leftarrow$ $b \notin A$ .. لأنه لا يوجد $r>0$ بحيث : $]b-r, b+r[\subset A$ .. $\Leftarrow$ b ليست داخلية في A .

$\Longrightarrow A^\circ =]a,b]^\circ =]a,b[$

- كل نقطة في المجال المفتوح تصلح لتكون نقطة في A°

2 - $A = \{3,5,7\}$ $\Leftarrow$ نلاحظ أن : $A^\circ = \emptyset$ .. لأن : $3,5,7 \notin A^\circ$ ..

3 - $\mathbb{Z}^\circ = \emptyset$

4 - $A = [1,+\infty[\cup \{-3\}$ $\Leftarrow$ $A^\circ =]1,+\infty[$ ..

* تمرين : أوجد كل من :

$(]1,2[\cup [3,5[)^\circ , (\mathbb{R}/\mathbb{Q})^\circ , \mathbb{R}^\circ , \mathbb{Q}^\circ$

$]1,2[\cup]3,5[$, $\emptyset$, $\mathbb{R} = \mathbb{R}^\circ$, $\emptyset$

*المجال: A مجال $\iff \forall a,b \in A \land a<x<b \Rightarrow x \in A$

Subject: / /

* المجموعة المفتوحة في $\mathbb{R}$ .. (open set)

تعريف:

لتكن $A \subset \mathbb{R}$. نقول عن المجموعة A أنها مفتوحة في $\mathbb{R}$. إذا تحقق التالي:

" $A = A^\circ$ "

• أي أنّ جميع نقاط A داخلية ، وبعبارة أخرى: كل نقطة من A تصلح لأن تكون مركز لجوار محتوى في A .

*- أمثلة:

1- $]a,b[=]a,b[^\circ \Leftarrow]a,b[$ مجموعة مفتوحة.

2- $]1,2[\cup]3,4[= (]1,2[\cup]3,4[)^\circ \Leftarrow]1,2[\cup]3,4[$ مجموعة مفتوحة.

3- $\varnothing$ .. * $\varnothing = \varnothing^\circ \Leftarrow \varnothing$ مجموعة مفتوحة.

** نعلم أن:

A مفتوحة $\iff \{\text{if } \exists r>0 : x \in A \Rightarrow]x-r, x+r[\subset A\}$

$\Leftarrow$ لو كانت $A = \varnothing$ .. عندئذٍ:

$\underbrace{x \in \varnothing}_{\text{خاطئ}} \Rightarrow \underbrace{]x-r, x+r[\subset \varnothing}_{\text{خاطئ}} \Rightarrow$ اقتضاء صحيح

$\Leftarrow \varnothing$ مجموعة مفتوحة . #

4- $\mathbb{R}$ مجموعة مفتوحة.

5- $\{a_1, \dots\dots, a_n\}^\circ = \varnothing \Leftarrow \{a_1, \dots, a_n\}$ مجموعة غير مفتوحة.

" - المجموعات المنتهية .. ليست مفتوحة . - "

6- $A = [a,b[\Leftarrow A^\circ =]a,b[\Leftarrow A$ مجموعة غير مفتوحة.

7- $A = [a,b] \Leftarrow A^\circ =]a,b[\Leftarrow A$ غير مفتوحة.

" - المجال المغلق أو النصف مغلق/مفتوح . ليست مجموعة مفتوحة . - "

« كل مجال مفتوح هو مجموعة مفتوحة لكن العكس ليس صحيحاً بالضرورة. »

Subject: / /

- نتائج -

1- تقاطع مجالين مفتوحين إما $\emptyset$ أو مجال مفتوح ..

2- تقاطع مجموعتين مفتوحتين .. مجموعة مفتوحة.

3- تقاطع عدد منتهٍ من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة.

4- اجتماع أي جماعة من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة. (منتهٍ أو غير منتهٍ)

5- (A مفتوحة) $\Longleftrightarrow$ (A هي اجتماع لمجالات مفتوحة).

- الإثبات:

1- واضح.

2- نفرض أن: A, B مفتوحتين .. إذا كان: $A \cap B = \emptyset$ ، يتم المطلوب.

أما إذا كان: $A \cap B \neq \emptyset$ .. عندئذٍ:

$$\exists x \in A \cap B$$

$$\Rightarrow \exists r_1, r_2 > 0 : I_1 =]x - r_1, x + r_2[\in A$$

$$I_2 =]x - r_2, x + r_1[\subset B$$

$$\Rightarrow \exists r = \min r_1, r_2 : I =]x - r, x + r[\subset I_1, I_2$$

$$\Rightarrow I \subset A \cap B \quad \#$$

3- يتم البرهان "بالاستقراء الرياضي".. اعتماداً على 2 ..

4- نفرض: $\{A_i : i \in I\}$ جماعة من المجموعات المفتوحة.

لنبرهن أن: $\bigcup_{i \in I} A_i$ مجموعة مفتوحة..

ليكن $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists i_0 \in I : x \in A_{i_0}$

وعلماً أن « A_{i_0} مفتوحة » ..

$$\Rightarrow \exists r > 0 :]x - r, x + r[\subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$\Rightarrow \text{« } \bigcup_{i \in I} A_i \text{ مفتوحة »}$$

$\#$

5 -

" $\Longrightarrow$ "

*- لنفرض أن : $(A = \bigcup_{i\in I} A_i)$ .. حيث أن : A_i مجالات مفتوحة ..
عندئذٍ :
بما أن : A_i مجالات مفتوحة $\Leftarrow$ A_i مجموعات مفتوحة .. $\Leftarrow$ « حسب 4 »
$\bigcup_{i\in I} A_i$ .. مجموعة مفتوحة .. وبما أن : $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ .. $\Leftarrow$ A مفتوحة ..
#

" $\Longleftarrow$ "

*- نفرض أن : A مجموعة مفتوحة .. عندئذٍ :

$\forall x \in A$ ؛ $\exists r_x > 0$:

$\{x\} \subset]x - r_x , x + r_x[\subset A$ كلٍ

- وبما أن A مفتوحة ..

$$\Rightarrow A = \bigcup_{x\in A} \{x\} \subset \bigcup_{x\in A}]x - r_x , x + r_x[\subset A$$

$$\Rightarrow A = \bigcup_{x\in A}]x - r_x , x + r_x[\quad .. \quad \#$$

*- تمرين 11 - أثبت أنه :

$$\{0\} = \bigcap_{n\geq 1}]-\frac{1}{n} , +\frac{1}{n}[$$

- ثم استنتج أن :
« التقاطع غير المنتهي لمجموعات مفتوحة ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة .

*- تمرين 12 - نفرض أن : $\{a_n\}_{n\geq 1}$ متتالية حقيقية غير ثابتة . ونفرض أن : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ .. أثبت أن :

$$\{\forall \varepsilon > 0 \text{ ؛ }]a - \varepsilon , a + \varepsilon[/ \{a\}\} \cap \{a_n : n \geq 1\} \neq 0$$

#