/ /

الموضوع: ح3/ نظرية المعادلات التفاضلية

بسم الله الرحمن الرحيم

* حل تمرين الوظيفة:

$$(1-z)w'' - w' + z w = 0 \Rightarrow w'' - \frac{1}{(1-z)} w' + \frac{z}{(1-z)} w = 0$$

$$w(0)=1 \quad , \quad w'(0)=1$$

$$\left.\begin{aligned} w' &= v \\ v' &= -a(z)v - b(z)w \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} w' &= 0w + 1\cdot v \\ v' &= \frac{-z}{1-z} w + \frac{1}{1-z} v \end{aligned}$$

ونضع:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-z}{1-z} & \frac{1}{1-z} \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \end{bmatrix}, \quad v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = Tv_0 = e + \int_0^z E v_0 \, dz = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \end{bmatrix} + \int_0^z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-z}{1-z} & \frac{1}{1-z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dz$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} e_0 + z \\ e_1 + z \end{bmatrix}$$

$$v_2 = Tv_1 = e + \int_0^z E \cdot v_1 \, dz = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \end{bmatrix} + \int_0^z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-z}{1-z} & \frac{1}{1-z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 + z \\ e_1 + z \end{bmatrix} dz$$

$$= \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \end{bmatrix} + \int_0^z \begin{bmatrix} e_1 + z \\ \frac{(-z)(e_0+z) + e_1 + z}{1-z} \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} e_0 + e_1 z + \frac{z^2}{2} \\ e_1 + e_0 z - (2 - e_0 + e_1)\ln(z-1) + z^2/2 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = Tv_2 = e + \int_0^z E v_2 \, dz$$

$$= \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \end{bmatrix} + \int_0^z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-z}{1-z} & \frac{1}{1-z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 + e_1 z + \frac{z^2}{2} \\ e_1 + e_0 z - (2 - e_0 + e_1)\ln(z-1) + z^2/2 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \end{bmatrix} + \int_0^z \begin{bmatrix} e_1 + e_0 z - (2-e_0+e_1)\ln(z-1) + z^2/2 \\ (1/2 - e_1)\frac{z^2}{1-z} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{1-z} + \frac{e_1}{1-z} - \frac{2-e_0+e_1}{1-z}\ln(z) \end{bmatrix} dz$$

$$= \begin{bmatrix} e_0 + e_1 z + e_0 z^2/2 - 2(2-e_0+e_1)\big((e-z-1)\ln(z-1) - z\big) + \frac{z^3}{2\cdot 3} \\ e_1 z + \frac{1}{2} e_1 z^2 + \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + (2-e_0+e_1)\ln^2\left(\frac{z-1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$w = e_0(---) + e_1(---)$$

* سؤال

$$(1-z)w'' - w' + z w = 0$$

$$w(0) = 1 \quad , \quad w'(0) = 1$$

نقسم طرفي المعادلة على أمثال $w''$

لا تنعدم داخل $c_0$ — تنعدم ذاتاً 0

$$w'' - \frac{1}{1-z_0} w' + \frac{z}{1-z} w = 0$$

أمثال $w''$ عند الصفر يساوي الصفر وبالتالي $z=0$ نقطة عادية ومنه نبحث عن حل من الشكل الآتي:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

هدفنا تعيين $c_k$ أي $c_0, c_1, \ldots$ وإيجاد صيغة تدريجية $c_k$ بدلالة $c_{k-1}$ ومن ثم نقوم بتعويض $c_k$ في المتسلسلة فنحصل على المطلوب لنشتق

$$w' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$$

(أخذنا الدليل من عند الواحد إذا عوضنا عنه $k=0$ نحصل على الصفر)

$$w'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2}$$

نعوض في المعادلة المفروضة:

$$(1-z)\sum_{2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k} + z\sum_{0}^{\infty} c_k z^k = 0$$

نفك الأقواس

$$\sum_{2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} - \sum_{2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-1} - \sum_{0}^{\infty} k c_k z^{k} + \sum_{0}^{\infty} c_k z^{k+1} = 0$$

وبالتالي نجعل الأدلة تبدأ من $k=1$ { $k=2$ }

$$\sum_{2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} - \sum_{2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-1} - c_1 z^0 - \sum_{k=2}^{\infty} k c_k z^{k-1} + c_0 z^1 + c_1 z^2 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{k+1} = 0$$

$$-c_1 z^0 + c_0 z^1 + c_1 z^2 + \sum_{2}^{\infty}\left[k(k-1)c_k z^{k-2} - k(k-1)c_k z^{k-1} - k c_k z^{k-1} + c_k z^{k+1}\right] = 0$$

فاحفظ على الحدود الأولى،

$$-c_1 z^0 + c_0 z + c_1 z^2 + 2c_2 z^0 - 2c_1 z^1 - 2c_2 z^1 + c_2 z^3 + b c_3 z - b c_3 z^2 - 3c_3 z^2 + c_3 z^4 + \cdots = 0$$

نشكل مطابقة (أمثال $z^0$ أنها لوحدها)

$z^0: \quad -c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}c_1$

$z^1: \quad c_0 - 4c_2 + b c_3 = 0 \Rightarrow$

$z^2: \quad c_1 - b c_3 - 3c_3 = 0 \Rightarrow$

نحصل على $c_n$

$$w = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

نتائج الدراسة: وهو المطلوب.

$$a(z) = \frac{1}{z} a_1(z)$$

قطب بسيط على الأكثر.

$b(z)$ انا نتبعها من (u) أو من (8)

من (u) نجد:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda_1)(k+\lambda_1-1)c_k z^{k+\lambda_2-2} + a(z)\sum_{0}^{\infty}(k+\lambda_1)c_k z^{k+\lambda_1-1} + b(z)\sum_{0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda_1} = 0$$

$$z^{\lambda_1-2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda_1)(k+\lambda_1-1)c_k z^k\right] + a(z) z^{\lambda_1-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda_1)c_k z^k\right] + b(z) z^{\lambda_1}\left[\sum_{0}^{\infty} c_k z^k\right] = 0$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda_1)(k+\lambda_1-1)c_k z^k\right] + a(z)\cdot z\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda_1)c_k z^k\right] + b(z) z^2\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\right] = 0$$

$$b(z) = -\frac{1}{z^2\left[\sum_{0}^{\infty} c_k z^k\right]} \times \left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda_1)(k+\lambda_1-1)c_k z^k + a(z)\cdot z\sum_{0}^{\infty}(k+\lambda_1)c_k z^k\right]$$

$$b(z) = \frac{1}{z^2} \times \left[\frac{-\sum(k+\lambda_1)(k+\lambda_1-1)c_k\cdot z^k + a(z)\cdot z\sum(k+\lambda_1)c_k}{\sum_{0}^{\infty} c_k z^k}\right] = \frac{1}{z^2}\, b_1(z);\ c_0 \neq 0$$

$$\text{where: } b_1(z) = \left[\frac{-\sum_{0}^{\infty}(k+\lambda_1)(k+\lambda_1-1)c_k z^k + a(z)\cdot z\sum_{0}^{\infty}(k+\lambda_1)c_k z^k}{\sum_{0}^{\infty} c_k z^k}\right]$$

الموضوع: ............ / /

$b_1(z)$ هو تابع تحليلي في جوار الصفر ويكون $b_1(0) = -\lambda(\lambda_1 + a_1(0) - 1)$

نستنتج أن $z=0$ هي قطب ثنائي مضاعف على الأكثر للتابع $b(z)$

مما سبق نستنتج أن الشرط اللازم لكي يكون للمعادلة (1) حلول من الشكل (2) هي أن تكون النقطة $z=z_0=0$ قطب بسيط على الأكثر بالنسبة للدالة $a(z)$ وقطب مضاعف على الأكثر بالنسبة للدالة $b(z)$

لنبرهن كفاية الشرط:

أي لنبحث في حلول هذه المعادلة من الشكل (2) لكون $a_1(z)$ ، $b_1(z)$ تابعان تحليليان سوف نكتبهما على شكل متسلسلة قوى

$$a_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad , a(z) = \frac{1}{z} a_1(z)$$

$$b_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \qquad ; b(z) = \frac{1}{z^2} b_1(z)$$

نعوض في (1) نجد:

$$w'' + \frac{1}{z} a_1(z) w' + \frac{1}{z^2} b_1(z) w = 0$$

نضرب بـ $z^2$

$$z^2 w'' + z a_1(z) w' + b_1(z) w = 0 \quad (9)$$

هذه فاصل المعادلة وكلها نعوض بإجراء التحويل:

$$w = z^\lambda \cdot u \qquad ; u = u(z) \qquad ; \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

نشتق مرتين ومن ثم نعوض في المعادلة:

$$w' = \lambda z^{\lambda-1} u + z^\lambda u'$$

$$w'' = \lambda(\lambda-1) z^{\lambda-2} \cdot u + 2\lambda z^{\lambda-1} u' + z^\lambda u''$$

نعوض في (9) نجد:

$$z^2 u'' + [2\lambda z + a_1(z) \cdot z] u' + [\lambda(\lambda-1) + \lambda a_1(z) + b_1(z)] u = 0$$

ننظر إلى أمثال $u$ ونفرض $z=0$

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda a_1(0) + b_1(0) = 0$$

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda c_0 + d_0 = 0$$

$$; c_0 = a_1(0) \qquad , d_0 = b_1(0)$$

الموضوع: ........................ / /

لتكن $\lambda$ هو أحد جذري المعادلة الجبرية وتسمى المعادلة الدليلية (المميزة) وهي عبارة عن معادلة جبرية من الدرجة الثانية يكون لها جذر مضاعف أو جذرين مختلفين ومن هذه المعادلة الدليلية توجد

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda_1}$$

$$w_2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda_2}$$

"انتهت المحاضرة"

yahia.