Subject: 17/3/2014

« المحاضرة الثالثة »

1-2 .. الحلقة الجزئية :

1-2-1 .. تعريف :

- لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ، ولتكن $S' \subseteq R$ مجموعة غير خالية ، عندئذٍ نقول عن S' أنها حلقة جزئية من R .. إذا وفقط إذا كانت $(S',+,\cdot)$ حلقة بحد ذاتها .. ونرمز لذلك بالرمز : « $R \geq S'$ » ..

- أمثلة :

$\boxed{1}$ - $R=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ حلقة .. فإن : $S'=2\mathbb{Z}$ حلقة جزئية من R ..

$\boxed{2}$ - $R=(\mathbb{Z}(\sqrt{p}),+,\cdot)$ حلقة .. فإن : $S'=\mathbb{Z}$ حلقة جزئية من R ..

$\boxed{3}$ - $R=(\mathbb{Z}_6,\oplus,\otimes)$ حلقة . فإن : $S'_1=2\mathbb{Z}_6$ و $S'_2=3\mathbb{Z}_6$ حلقات جزئية من الحلقة R ..

1-2-2 .. مبرهنة : - اختبار الحلقة الجزئية -

- لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة .. و $S' \subseteq R$ مجموعة غير خالية ، عندئذٍ :
S' حلقة جزئية من R .. إذا وفقط إذا تحقق :

$\boxed{1}$ - $\forall a,b \in S' \ ; \ a.b \in S'$

$\boxed{2}$ - $\forall a,b \in S' \ ; \ a-b \in S'$

الأولى بتحقق الثاني [illegible]

« الإثبات » .. " $\Leftarrow$ " لزوم الشرط :

- لنفرض أن S' حلقة جزئية من R ولنثبت تحقق الشرط :

*- بما أن $(S',\cdot)$ شبه زمرة فيكون ما يلي محقق :

$\forall a,b \in S' ; a.b \in S'$

*- وبما أن $(S',+)$ زمرة فيكون ما يلي محقق :

$\forall a,b \in S' ; a,-b \in S' \Rightarrow a-b \in S'$

Subject:

"$\Leftarrow$" كفاية الشرط :

- لدينا "$\text{ص}' \neq \emptyset$" فرضاً .. $\Leftarrow$ لنثبت أن : $(\text{ص}',+)$ زمرة تبديلية ..

$*- \exists a \in \text{ص}' \Rightarrow 0 = a - a \in \text{ص}' \Rightarrow 0 \in \text{ص}'$ "الحيادي"

$**- \forall a \in \text{ص}' ; 0, a \in \text{ص}' \Rightarrow -a = 0 - a \in \text{ص}'$ "النظير"

$***- \forall a, b \in \text{ص}' ; a + b = a - (-b) \in \text{ص}'$ "+ داخلية"

$****- \forall a, b, c \in \text{ص}' \subseteq R ; (a+b)+c = a+(b+c)$ "تجميعية +"

$*****- \forall a, b \in \text{ص}' \subseteq R ; a + b = b + a$ "تبديلية"

$\Rightarrow$ $(\text{ص}',+)$ زمرة تبديلية #

- لنثبت الآن أن : $(\text{ص}',\cdot)$ شبه زمرة ..

$*- \forall a, b, c \in \text{ص}' \subseteq R ; a(b.c) = (a.b).c$

$**- \forall a, b \in \text{ص}' ; a.b \in \text{ص}'$

$\Rightarrow$ $(\text{ص}',\cdot)$ شبه زمرة . #

- لنثبت أخيراً أن $(\cdot)$ توزيعي على $(+)$ ..

$*- \forall a, b, c \in \text{ص}' \subseteq R ; a.(b+c) = a.b + a.c$

$\wedge \; (b+c).a = b.a + c.a$ #

$\Leftarrow$ الضرب توزيعي على الجمع .. $\Leftarrow$ $(\text{ص}',+,\cdot)$ حلقة ..

$\Leftarrow$ $(\text{ص}',+,\cdot)$ حلقة جزئية في R ..

#

Subject:

$1_{S'} \in S' \leq R \ni 1_R$

*- $1_{S'} \in S' \leq R \ni 1_R$ ..

*- أمثلة :

[1] - مثال عن حلقة لا تحوي محايد لكنها تحوي حلقة جزئية منها تملك محايد ..

$$R = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, +, \cdot \right)$$

حلقة .. «لا تملك محايد» ..

$$S' = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}, +, \cdot \right)$$

حلقة جزئية في R .. «تملك محايد» ..

[2] - مثال عن حلقة تحوي محايد لكنها تحوي حلقة جزئية منها لا تحوي محايد ..

$R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .. حلقة .. تملك محايد ..

$R_1 = (2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .. حلقة جزئية من R .. لا تملك محايد ..

*- تمرين : - هات أمثلة عن مايلي :

*- حلقة جزئية و حلقة أصلية كلاهما لا تحويان محايد .

**- حلقة جزئية و حلقة أصلية كلاهما تحويان محايد ، بحيث أن : هذين المحايدين ليسا متساويين ..

1 - 2 - 3 .. مبرهنة :

- لتكن R حلقة ، ولتكن $\{S'_i\}_{i \in I}$ مجموعة مرقمة من الحلقات الجزئية من R .. عندئذٍ :

إن : $S' = \bigcap_{i \in I} S'_i$ .. هي حلقة جزئية من R ..

«سواءً كان هذا التقاطع منتهياً أم غير منتهي»

«الإثبات» .. لنثبت أولاً أن $S \neq \emptyset$.

$* - \forall i \in I \; ; \; 0 \in S_i \Rightarrow 0 \in S \Rightarrow S \neq \emptyset \; *$

- من المبرهنة السابقة -

$$\text{II}- \forall a,b \in S \Rightarrow \forall i \in I : a,b \in S_i \Rightarrow$$

$$\forall i \in I \; ; \; a.b \in S_i \;\wedge\; a-b \in S_i$$

$$\Rightarrow a.b \in \bigcap_{i\in I} S_i = S \;\wedge\; a-b \in \bigcap_{i\in I} S_i = S$$

$$\Rightarrow S \leq R \quad \#$$

**- تمرين :

- إذا كانت R حلقة ، وكل من S_1 , S_2 حلقات جزئية من R ، أثبت أن :

$\boxed{1}$ - $S = S_1 \cup S_2$ ، ليست بالضرورة حلقة جزئية من R .

$\boxed{2}$ - $S = S_1 \cup S_2$ ، حلقة جزئية من R ، إذا وفقط إذا كانت :

$$S_1 \subset S_2 \quad or \quad S_2 \subseteq S_1$$

«الحل» .. وظيفة .

1-3 .. التشاكل الحلقي : «Ring Homomorphism»

1-3-1 .. تعريف :

- لتكن R و S حلقتين ، نقول عن التطبيق :

$$\varphi : R \longrightarrow S$$

أنه تشاكل حلقي إذا تحقق :

$\boxed{1}$ - $\forall a,b \in R \; ; \; \varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$

$\boxed{2}$ - $\forall a,b \in R \; ; \; \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

((مثال)) ..

- ليكن لدينا التطبيق : $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$

المعرف عن الشكل الآتي : $\varphi(a) = a \pmod{n}$

- إن φ هو تشاكل حلقي ..

- أما التطبيق : $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

المعرف عن الشكل التالي : $\psi(a) = 3a$

- هو ليس تشاكل حلقي .. لأن :

- لنأخذ مثلاً : $a = 2 \wedge b = 3$ عندئذٍ :

$*- \psi(a.b) = \psi(2.3) = \psi(6) = 3.6 = 18$

$**- \psi(a).\psi(b) = \psi(2).\psi(3) = 3(2).3(3) = 6.9 = 54$

$\Rightarrow 18 \neq 54 \quad \#$

2-3-1 .. مبرهنة :

- لتكن R و R' .. حلقتين ، عندئذٍ :

إذا كان التطبيق : $\varphi : R \to R'$ .. تشاكل حلقي ..

فإن كل مايلي من قضايا هو صحيح ..

$\boxed{1}$- $\varphi(0) = 0$

$\boxed{2}$- $\forall a \in R \; ; \; \varphi(-a) = -\varphi(a)$.

$\boxed{3}$- if $A \leq R \; ; \; \varphi(A) \leq R'$.

$\boxed{4}$- if $B \leq R' \; ; \; \varphi^{-1}(B) \leq R$.

$\boxed{5}$- if $Im\varphi \leq R'$; $ker(\varphi) \leq R$.

$\boxed{6}$- φ متباين $\Leftrightarrow Ker(\varphi) = \{0\}$

((الإثبات)) ..

$\boxed{1}$- $0 = 0 + 0 \Rightarrow \varphi(0) = \varphi(0+0)$

$= \varphi(0) + \varphi(0) = \varphi(0)$

$\#$

Subject: ____ / /

$\boxed{2}$ - $\forall a \in \mathbb{R}\ ;\ 0 = \varphi(a) + \varphi(-a)$

$$\Rightarrow \varphi(-a) = -\varphi(a) \quad \#$$

$\boxed{13}$ -

ـ إن تعريف $\varphi(A)$ هو:

$$\varphi(A) = \{\varphi(a) \in S' : a \in A\}$$

$\Rightarrow 0 \in A \Rightarrow \varphi(0) = 0 \in S'$

$\Rightarrow 0 \in \varphi(A) \Rightarrow \varphi(A) \neq \emptyset$

*- $\forall x, y \in \varphi(A)\ ;\ \exists a_1, a_2 \in A :$

$$x = \varphi(a_1) \ \wedge\ y = \varphi(a_2)$$

عندئذٍ:

1)- $x \cdot y = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) = \varphi(\underbrace{a_1 \cdot a_2}_{\in A}) \in \varphi(A)$

2)- $x - y = \varphi(a_1) - \varphi(a_2) = \varphi(\underbrace{a_1 - a_2}_{\in A}) \in \varphi(A)$

⇐ « من المبرهنة (1-2-2) » نجد أن:

$$\varphi(A) \leq S' \quad \#$$

$\boxed{14}$ - « بشكل مشابه لـ $\boxed{13}$ »

$\boxed{15}$ - $Im(\varphi) = \varphi(R) \leq S' \Rightarrow$ المناقشة من المبرهنة أعلاه

$Ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\}) \leq R$ « المبرهنة »

$\#$

$\boxed{16}$ - "$\Leftrightarrow$"

$\forall x \in Ker(\varphi)\ ;\ \varphi(x) = 0$

ومن جهة أخرى لدينا : $\varphi(0) = 0$

$$\Rightarrow \varphi(0) = \varphi(x) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \ker(\varphi) = \{0\}$$

#

"$\Leftarrow$"

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \; ; \; \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow x - y \in \ker(\varphi) = \{0\}$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$\Rightarrow$ φ متباين .

#

#