تذكرة بالفضاء المنظم:

* الفضاء المنظم: يسمى أيضاً بالفضاء الخطي المنظم أو الفضاء المتجه المنظم والفضاء المنظم X هو فضاء متجه مزود بنظيم والنظيم على فضاء متجه حقيقي أو عقدي هو دالة حقيقية على X يرمز لقيمتها بنقطة x من X بالشكل $\|x\|$ وتقرأ نظيم x بحيث تتحقق الخواص الآتية   نقرأ نظيم x — $\|.\|$

1) $\|x\| \geq 0$

2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

وتسمى هذه بمتراجحة المثلث بحيث α عدد ثابت و $x, y \in X$ ومن الخواص الشهيرة:

5) $\big| \|y\| - \|x\| \big| \leq \|y - x\|$

6) $\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_n\|$

النظيم هو تطبيق مستمر $\|.\| : x \longrightarrow \|x\|$ بالفضاء $(X, \|.\|)$

وهذا النظيم يعرف مسافة $\rho(x,y) = \|x - y\|$

والذي يتمتع بالخواص التالية:

1) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

2) $\rho(x,x) = 0$

3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

وهكذا نرى أن كل فضاء منظم هو فضاء متري وليس بالضرورة أن كل فضاء متري هو فضاء منظم وطالما نتحدث عن فضاء متري فهذا يعني أن تقارب متتالية له معنى.

بعبارة أخرى إذا كانت كل متتالية كوشية في هذا الفضاء المنظم متتالية متقاربة من عناصر هذا الفضاء عندئذٍ يقال أن هذا الفضاء فضاء تام

* ولنطرح بعض الأمثلة على الفضاءات:

أولاً:

$\mathbb{C}^n$ الفضاء العقدي ذي n بعد

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_i ; x_i \in \mathbb{C})$

ولنعرف عليها عمليتي الجمع والضرب:

$x+y = x_i + y_i$

$\lambda x = \lambda (x_i) \; ; \; \lambda \in \mathbb{C}$

وعليه تنظم $\mathbb{C}^n$ بأشكال مختلفة

$$\|x\|_e = \sqrt{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|}$$

يسمى مسافة إقليدس. ✓ دليل النظم

* ثانياً: الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ المزود بعمليتي الجمع والضرب المرفقتين كما يلي:

$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\forall y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$

$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \; ; \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

إن هذا الفضاء هو فضاء متجهي حقيقي علينا التحقق من شروطه؟

وعليه تنظم $\mathbb{R}^n$ بأشكال مختلفة

$$\|x\|_e = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

$$\|x\| = \max_{i \in I} |x_i|$$

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

* ثالثاً:

لتكن G جزءاً من $\mathbb{R}^n$ ولتكن $C(G)$ مجموعة جميع الدوال المستمرة على G

والتي تأخذ قيمتها في $\mathbb{R}^n$ $\quad F(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

ولنعرف عملية الجمع

$h = f + g$

$h(x) = f(x) + g(x)$

كما نعرف عملية الضرب بعدد حقيقي

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \; ; \; \forall \alpha \in C(G)$

نلاحظ الآن أننا أمام فضاء خطي حقيقي وبالتالي علينا أن نعرف عليه نظيم يأخذ الأشكال الآتية:

$\|f\|_0=\{\max|f(x)|\ ;\ x\in G\}$

كدليل للنظيم

ويسمى هذا النظيم بنظيم القيمة العظمى كذلك،

$\|f\|_1=\{\sup|f(x)|\cdot p(x)\ ;\ x\in G\}$

أخذنا الـ sup لأن $p(x)$ دالة غير مستمرة وتسمى الـ $p(x)$ بـ دالة الحمولة.

$p(x)$ لم تفرض بـ الاستمرار بالأصل فإنه لا يبلغ حده الأعلى لذلك وضعنا الـ sup بدلاً الـ max ولو كان مستمراً لوضعنا max بدلاً من الـ sup والـ $p(x)$ يحقق الشرط

$0<\alpha\le p(x)\le B<\infty$

ويسمى الـ $\|\cdot\|_1$ نظيم القيمة العظمى المحملة.

عليه التحقق في جميع هذه الأمثلة من صحة شروط النظيم بكل سهولة (يدرس في التحليل التابعي بشكل مفصل جداً).

* تعريف فضاء باناخ:

هو فضاء خطي منظم تام مضافاً لذلك كل متتالية كوشية من عناصر X هي متتالية متقاربة في X وهذا التقارب يوصف بالتقارب النظيمي والتقارب النظيمي يؤدي إلى التقارب المنتظم ويعرف

$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \|f_n-f_m\|<\varepsilon\Rightarrow\max|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\ ;\ \forall n,m\ge N$

إن هذا الفضاء الإقليدي R^n (المثال الثاني والثالث) هما مثالان على فضاءين باناخ حقيقيين أما المثال الأول فهو مثال على فضاء باناخ عقدي.

* مبرهنة باناخ:

لتكن A مجموعة غير خالية ومغلقة وجزئية من فضاء باناخ P، وليكن المؤثر $T:A\to A$ أي أن $T(A)\subseteq A$

ولنفرض أن هذا المؤثر يحقق في A شرط ليبتز،

$\|Tx-Ty\|\le k\|x-y\|,\ x,y\in A\ ;\ k<1$

عندئذ تقبل المعادلة: $Tx=x$ (المؤثر يعطي نفس العنصر)

حلاً وحيداً هو $x=\bar{x}$ في A

وإذا شكل المبدأ انطلاقاً من عنصر كيفي $x_0\in A$ التقريبات التالية:

الموضوع: .... / /

$x_1 = T x_0$

$x_2 = T x_1$

$\vdots$

$x_{n+1} = T x_n$

فعندئذٍ تصبح المتراجحة التالية:

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\| \; ; \; k<1$$

والأكثر من ذلك المتتالية x_n تتقارب نحو $\bar{x}$ تقارباً ناظمياً

تقبل بدون برهان.

$x_n \longrightarrow \bar{x}$

تقارب ناظمي

* المعادلات التفاضلية الخطية في المساحة العقدية:

سنعالج في هذا الفصل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية والتي تكون فيها الدالة والمتغير عقدي مستخدمين بذلك سلاسل القوى والتذكر بأن دراسة تقارب متسلسلات القوى العقدية والتكامل مصاغة في العقدية كما هو الحال في الحقيقية، سنقدم بعض الأمثلة الهامة على هذه المعادلات التفاضلية مثل معادلة لوجندر، بيل، غاوس أو (المعادلة فوق الهندسية).

كما يذكر أن دراسة هذه المعادلات في العقدية تمكننا من الاستفادة من العديد من الأفكار، مثل نقاط التفرع والنقاط الشاذة والتمديد التحليلي.

* النقاط العادية والنقاط الشاذة:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية المتجانسة الآتية:

$$w'' + a(z)\, w' + b(z)\, w = 0 \qquad (1)$$

حيث $a(z), b(z)$ دالتان عقديتان بـ (z) متغير عقدي، إذا كانت الدالتان $a(z), b(z)$ تحليليتان عند النقطة $z = z_0$ نسمي هذه النقطة بالنقطة العادية للمعادلة التفاضلية.

ونسمي كل نقطة غير عادية بأنها نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية (1)

وعلى سبيل المثال:

$$w'' + \frac{1}{(z-1)(z-2)}\, w' + \frac{z}{(z-1)^2}\, w = 0$$

الموضوع: .... / /

نلاحظ أن جميع هذه النقاط لهذه المعادلة هي نقاط عادية باستثناء $z=1$

$z=2$ حيث أن التابع يفقد تحليليته في هذه النقط.

وبالتالي $z=1$ ، $z=2$ هما نقطتان شاذتان لهذه المعادلة.

هل المعادلة التفاضلية العادية بجوار نقطة عادية هذا السؤال تجاوب

عليه المبرهنة الآتية.

* مبرهنة:

إذا كانت الدالتين $a(z)$ ، $b(z)$ تحليليتان بالقرص $\Omega(z,R)$ (قرص مغلق) عندئذ المسألة القيم الابتدائية.

$$\left.\begin{array}{l} w'' + a(z)w' + b(z)w = 0 \\ w(z_0) = c_0 \ , \ w'(z_0) = c_1 \end{array}\right\} (2)$$

لها حلاً تحليلياً وحيداً في القرص المذكور.

البرهان:

نجري التحويل

$$w' = v$$

(أمكنه أن نحول إلى جملة من المرتبة الأولى) $v' = w''$

$$(3)\left\{\begin{array}{l} v' = -a(z)v - b(z)w \\ w' = v \\ w(z_0) = v_0 \ , \ w'(z_0) = v_1 = c(z_0) \end{array}\right.$$

لندرس المسألة (3)

$$(4)\left\{\begin{array}{l} v_1' = e_{11}(z)v_1 + e_{12}(z)v_2 \\ v_2' = e_{21}(z)v_1 + e_{22}(z)v_1 \\ v_1(z_0) = \gamma_1 \quad \& \quad v_2(z_0) = \gamma_2 \end{array}\right.$$

المسألة 4 هي الأعم حيث

$e_{22}(z), e_{21}(z), e_{12}(z), e_{11}(z)$

هي عبارة عن دوال تحليلية في القرص المغلق

$\Omega(z_0, R)$

المسألة (س) تكافئ المعادلتين التكامليتين التاليتين :

$$(5)\qquad U_1 - \int_{z_0}^{z} [e_{11}(z) U_1 + e_{12}(z) U_2]\, dz = e_1$$

$$(6)\qquad U_2 - \int_{z_0}^{z} [e_{21}(z) + e_{22}(z) U_2]\, dz = e_2$$

لتكن $\Omega(z_0, R_1)$ و P بحيث $0 < R_1 < R$

نفرض فلك جديد عدديته تكون

$$\Omega(z_0, R_1) \subset \Omega(z_0, R)$$

هذا يعني أن الدالتين $a(z)$ ، $b(z)$ مستمرتان على القرص المغلق Ω_1 و (لأنهما بالأساس مستمران على Ω وهذا يعني بدوره أن الدوال $e_{ij}(z)$ محدودة على Ω وهذا يعني بدوره أن الدوال $e_{ij}(z)$ محدودة على Ω وهذا يعني وجود ثابت مثل A موجب بحيث

$$|e_{ij}(z)| < A \quad ; (i,j=1,2)$$

ولغة المصفوفات نستخدم المصطلحات التالية :

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = e_{ij} \qquad V = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to (5) \\ \to (6) \end{matrix}$$

ونستعرض البرهان .

نقول عن V انه تحليلي على منطقة D إذا كان كلاً من U_1 ، U_2 تحليليا هناك ونقول عن V انه محدود إذا كان كل من $|U_1|$ ، $|U_2|$ محدودة

لتكن الآن B هو فضاء جميع المتجهات V التحليلية والمحدودة على Ω_1 ولنعرف على هذا الفضاء النظيم الآتي :

$$\|V\| = \sup_{\Omega_1} |V(z)|\, e^{-4A|z-z_0|}$$

وحيث

$$|V(z)| = \max\{|V_1(z)|, |V_2(z)|\}$$

عليه الحقيقة متحققة شروط النظيم بسهولة عليه بسهولة البرهان على أن B فضاء خطي منظم تام أي هو فضاء باناخ .

إن المعادلتين 5 - 6 يمكن كتابتهما بالشكل الآتي

الموضوع: ....

$V - \int_{z_0}^{z} E \cdot V \, dz = e$

بالاستفادة من المصفوفات: $V = e + \int_{z_0}^{z} E \cdot V \, dz \quad (7)$

ولنكتب 7 بالشكل

$V = TV$

عندئذٍ V تحليلياً فعندئذٍ يكون T_V تحليلياً

$T_V = e + \int_{z_0}^{z} E \cdot V \, dz$

$|TV_1 - TV_2| = \left| \int_{z_1}^{z} E (V_1 - V_2)(z) \, dz \right|$

$\left\{ \begin{array}{l} TV_1 = e + \int E V_1 \, dz \\ TV_2 = e + \int E V_2 \, dz \end{array} \right.$ حيث $\leq \int | E (V_1 - V_2)(z) | \, dz$

وبما أن التكامل الوارد هنا مستقل عن طريق المكاملة فإننا نختاره القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين z ، z_0 بالشكل الآتي:

$M(t) = z_0 + t e^{i\alpha} \quad ; \alpha = \arg (z - z_0) \quad ; 0 \leq t \leq |z - z_0|$

مشتقة بالنسبة لـ t $\quad M'(t) = e^{i\alpha}$

$|T(V_1(t)) - T(V_2(t))| \leq 2A \int_0^{|z-z_0|} |V_1(M(t)) - V_2(M(t))| \cdot |M'(t)| \, dt$

$\leq 2A \int_0^{|z-z_0|} |V_1 - V_2| \, e^{-4A} \cdot e^{4At} \leq 2A \frac{1}{4A} \| V_1 - V_2 \| \, e^{4A|z-z_0|}$ تكامل

$\leq \frac{1}{2} \| V_1 - V_2 \| \, e^{4A|z-z_0|}$

نضرب الطرفين الأول والأخير بـ

$e^{-4A|z-z_0|} \, |TV_1 - TV_2| \leq \frac{1}{2} \| V_1 - V_2 \|$

نأخذ الـ sup للطرفين

$\| TV_1 - TV_2 \| \leq \frac{1}{2} \| V_1 - V_2 \|$

هذا يعني أن شرط ليبتز محقق لثابتة R تساوي $\frac{1}{2}$ أصغر من 1

ومنه يوجد لمسألة القيم الابتدائية رقم (2) حلاً وحيداً حسب مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ

- انتهت المحاضرة علمياً