السنة الرابعة جبر

قسم الرياضيات

نظرية الشبكات

2

مكتبة ميموزين

Mimozeyn

الفصل الدراسي الثاني

E- Mail: Mimozeyn@yahoo.com

4 /3 /2013-2014

* مثال عن المجموعة الخالية :

يوجد عدة أمثلة عن المجموعة الخالية ومنها المجموعة : $\phi = \{x / x \in \Omega ; x \neq x\}$

مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الشاملة نسبياً ولا تساوي نفسها

- إن القضية التالية صحيحة : $\forall y \in \phi : y^2 = -1$

لأن نفيها هي القضية $\exists y_0 \in \phi ; y_0^2 \neq -1$ وهذه القضية خاطئة لأنها تؤكد وجود عنصر y_0 ينتمي إلى المجموعة الخالية ϕ وهذا مستحيل

* جبر المجموعات :

لتكن Ω المجموعة الشاملة نسبياً، ولتكن $A,B,C \subseteq \Omega$ مجموعات جزئية منها :

نعرف متمم المجموعة A بالشكل : $A' \underset{def}{=} \{x \mid x \in \Omega \wedge x \notin A\}$

A' هي متممة المجموعة A في Ω

ويتحقق لدينا $(A')' = A$ والذي يعرف بقانون الارتداد

• لدينا القانون المفيد : $A - B = A \cap B'$

* بعض قوانين جبر المجموعات :

1) قانونا اللانمو : $A \cup A = A$ $\quad A \cap A = A$

2) القانونان التبديليان : $A \cup B = B \cup A$ $\quad A \cap B = B \cap A$

3) القانونان التجميعيان :

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{array}\right\}$$

٤) القانونان التوزيعيان :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

٥) قوانين المحايد والماص :

$A \cap \Omega = A$ ، $A \cup \phi = A$ المحايد

$A \cup \Omega = \Omega$ ، $A \cap \phi = \phi$ الماص

٦) قانون الارتداد $A'' = (A')' = A$

٧) قانونا الإتمام

$$A \cap A' = \phi$$
$$A \cup A' = \Omega$$

٨) قانونا دومورغان

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

* العلاقات الثنائية :

لتكن $A, B \subseteq \Omega$ ولتكن G مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A \times B$ أي :

$$G \subseteq A \times B = \{(a,b) / a \in A, b \in B\}$$

يقال عن G أنه بيان لعلاقة ثنائية مثل R من A إلى B

لأن $G \subseteq A \times B$ مع ملاحظة أن الجداء الديكارتي غير تبديلي في الحالة العامة إلا إذا $A=B$

((ملاحظة : تعيين G يعطي تعيين العلاقة الثنائية وبالعكس تعيين العلاقة يعين البيان))

ويتم تعريف ذلك كما يلي : (حيث $x \in A$ و $y \in B$)

$$(x,y) \in G \Leftrightarrow x R y$$

• حالة خاصة :

عندما $A=B$ فإننا نقول عن R إنها علاقة ثنائية في A ويكون $G \subseteq A \times A = A^2$

وأيضاً يكون حيث ... $x, y \in A$:

$$(x,y) \in G \Leftrightarrow x R y$$

* تعاريف :

لنفرض أن R_1 و R_2 علاقتان ثنائيتان من A إلى B و G_1 , G_2 بياناهما عندئذٍ :

أ) $R_1 \subseteq R_2 \iff G_1 \subseteq G_2$ « تكون علاقة محتواة في أخرى إذا كان بيانها محتوى في بيان العلاقة الثانية »

ب) $R_1 \cap R_2$ هي علاقة بيانها $G_1 \cap G_2$

ج) $R_1 \cup R_2$ هي علاقة بيانها $G_1 \cup G_2$

• البيان العكسي

نفرض أن $G \subseteq A \times B$ بيان لعلاقة ثنائية مثل R من A إلى B عندئذٍ :

$$G^{-1} = \{ (b,a) / (a,b) \in G \} \subseteq B \times A$$

G^{-1} هو البيان العكسي للبيان G

وهو بيان بحد ذاته وبالتالي تقابله علاقة ثنائية نرمز لها بـ R^{-1} وتدعى العلاقة العكسية لـ R

* تركيب علاقتين ثنائيتين :

لتكن $A, B, C \subseteq \Omega$ مجموعات، ولتكن R_1 علاقة ثنائية من A إلى B ، و R_2 علاقة ثنائية من B إلى C ، عندئذٍ نرمز بـ $R_2 \circ R_1$ لتركيب هاتين العلاقتين، ونعرفها كما يلي :

حيث $R_2 \circ R_1$ علاقة ثنائية من A إلى C :

$$a (R_2 \circ R_1) c \iff \exists b \in B ;\ a R_1 b ,\ b R_2 c$$

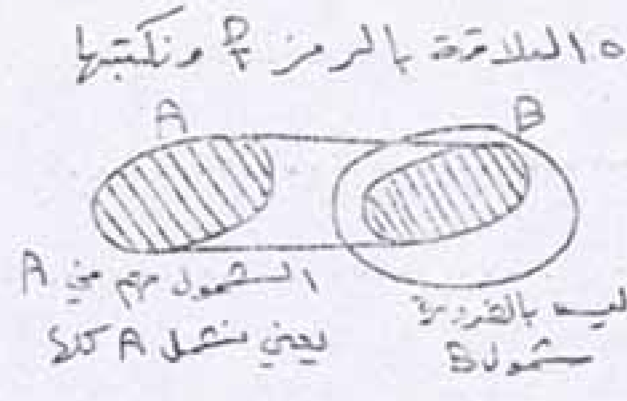
• ملاحظة :

يمكن البرهان على أن : $R_1 \subseteq R_2 \iff R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$

* التطبيق :

لتكن R علاقة من A إلى B بيانها G ، سنرمز لهذه العلاقة بالرمز f ونكتبها كما يلي :

$$f : A \longrightarrow B$$
$$a \longmapsto f(a) = b$$



$$aRb \Leftrightarrow f(a)=b$$

* شرط التطبيق (الدالة - التابع) : كل عنصر من المنطلق يرتبط بعنصر واحد فقط من المستقر

أي: $f: A \longrightarrow B$

$$a \longmapsto f(a)=b$$

$$a' \longmapsto f(a')=b'$$

$a=a' \Rightarrow f(a)=f(a')$ معرف جيداً (مستقل عن اختيار الممثلين)

أو $f(a)\neq f(a') \Rightarrow a\neq a'$

* شرط التباين: $f(a)=f(a') \Rightarrow a=a'$ (الأسهل والأكثر شيوعاً)

أو $a'\neq a \Rightarrow f(a')\neq f(a)$

* شرط الغمر: أياً كان $b\in B$ فإنه يوجد $a\in A$ بحيث يكون $f(a)=b$

أي: $\forall b\in B : \exists a\in A ; f(a)=b$

* الصورة المباشرة:

ليكن $f: A \longrightarrow B$ تطبيق، ولتكن $H\subseteq A$ عندئذٍ:

الصورة المباشرة لـ H وفق التطبيق f : $f(H)=\{f(x) / x\in H\}\subseteq B$

ويكون: $y\in f(H) \Leftrightarrow$ يوجد $x\in H$ بحيث $f(x)=y$

* الصورة العكسية:

ليكن $f: A \longrightarrow B$ تطبيق، ولتكن $K\subseteq B$ عندئذٍ:

الصورة العكسية لـ K وفق التطبيق f : $f^{-1}(K)=\{x / x\in A \wedge f(x)\in K\}\subseteq A$

" انتباه $f^{-1}(K)$ صورة عكسية وليست التابع العكسي "

ويكون: $x\in f^{-1}(K) \Leftrightarrow f(x)\in K$

* ملاحظة: $\left\{ \begin{array}{ll} H\subseteq f^{-1}f(H) & \text{" يتحقق التساوي إذا } f \text{ متباين "} \\ f f^{-1}(K)\subseteq K & \text{" يتحقق التساوي إذا } f \text{ غامر "} \end{array} \right.$

تمارين

• تمرين (١) :

لتكن : p, q قضايا ما والمطلوب :

أ) في أية حالة تكون القضية $(\sim p \Rightarrow p)$ صحيحة

ب) في أية حالة تكون القضية $(\sim(\sim p) \Rightarrow p)$ خاطئة

ج) إذا كانت القضية $(p \Rightarrow q)$ صحيحة فهل القضية $((\sim p) \Rightarrow (\sim q))$ صحيحة ولماذا ؟

• تمرين (٢) :

أثبت بمثال أنه إذا كان $A \cap B = A \cap C$ فليس من الضروري أن يكون $B = C$

وإذا كان $A \cup B = A \cup C$ فليس من الضروري أن يكون $B = C$

• تمرين (٣) :

أثبت أن التقاطع توزيعي على الفرق التناظري أي :

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

ثم أثبت أن الاجتماع ليس توزيعي على الفرق التناظري ، أي أن المساواة التالية غير صحيحة :

$$A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$$

• تمرين (٤) :

أثبت أن : $\left(\bigcup_k A_k\right) - \left(\bigcup_k B_k\right) \subseteq \bigcup_k (A_k - B_k)$

حيث $\bigcup_k A_k$ و $\bigcup_k B_k$ أسرتين من المجموعات ، $A - B = A \setminus B$

ثم اضرب مثالاً عن أن المساواة ليس بالضرورة أن تكون صحيحة دوماً.

• تمرين (٥) :

ليكن $f : A \longrightarrow B$ تطبيقاً ولتكن $C \subseteq A$ ، $D \subseteq B$ ، أثبت صحة ما يلي :

أ) $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$ وإذا كان f غامراً فإن $f(f^{-1}(D)) = D$

ج) $f^{-1}(f(C)) \supseteq C$ و إذا كان f متبايناً فإن $f^{-1}(f(C)) = C$

• تمرين (٦) :

لتكن R علاقة تكافؤ معرفة على مجموعة مثل M ، نقول بالتعريف عن المجموعة الجزئية H من M أنها مشبعة بالنسبة لعلاقة التكافؤ R إذا كانت H تحوي صف تكافؤ أي عنصر منها

المطلوب إثبات أن :

أ) H مشبعة $\Longleftrightarrow$ H تساوي اجتماع صفوف تكافؤ

ب) H مشبعة $\Longleftrightarrow$ $\pi^{-1}(\pi(H)) = H$ حيث $\pi : M \longrightarrow M/R$

$x \longmapsto \pi(x) = [x]$ صف تكافؤ لعنصر x

« π هو تطبيق الغمر القانوني »

* الأسرة :

لتكن I مجموعة ما ولنأخذ التطبيق $f : I \longrightarrow \Omega$

$$i \longmapsto f(i) = x_i$$

عندها يمكننا أن نكتب المجموعة الآتية :

$$\{x_i / x_i \in \Omega \; ; \; i \in I\}$$

وتسمى هذه المجموعة : أسرة من عناصر مجموعة Ω أدلتها هي I .

- الأسرة قد تكون منتهية وقد لا تكون منتهية

إذا كانت I مجموعة الأدلة منتهية حتماً ستكون الأسرة منتهية

أما إن كانت I غير منتهية فالأسرة قد تكون منتهية أو غير منتهية

- وزيادة على ذلك إذا كانت مجموعة الأدلة $I = \emptyset$ خالية فإننا نقول عن الأسرة أنها "أسرة خالية"

• ملاحظة : مجموعة أدلة الأسرة يمكن أن تكون خالية أما في المتتاليات فلا يمكن ذلك .

- لتكن $\{x_i / i\in I\}$ أسرة :

$$y \in \bigcup_{i\in I} x_i \iff \exists i_0 \in I : y \in x_{i_0}$$

$$z \in \bigcap_{i\in I} x_i \iff \forall i \in I : z \in x_i$$

* لتكن $I=\emptyset$ (مجموعة الأدلة خالية وبالتالي الأسرة خالية) عندئذٍ يكون :

$$\bigcup_{I=\emptyset} x_i = \emptyset \quad , \quad \bigcap_{I=\emptyset} x_i = \Omega$$

البرهان :

أ) لنفرض مؤقتاً أن $\bigcup_{I=\emptyset} x_i \neq \emptyset$ عندئذٍ يوجد $y\in\Omega$ بحيث يكون $y \in \bigcup_{I=\emptyset} x_i$
وهذا يعني حسب التعريف أنه يوجد $i_0 \in I = \emptyset$ بحيث يكون $y\in x_{i_0}$ وهذا غير ممكن
إذاً الفرض الجدلي خاطئ ومنه $\bigcup_{I=\emptyset} x_i = \emptyset$

ب) نلاحظ أن $\bigcap_{I=\emptyset} x_i \subseteq \Omega$ ولنفرض مؤقتاً أن : $\bigcap_{I=\emptyset} x_i \neq \Omega$
عندئذٍ $\bigcap_{I=\emptyset} x_i \subsetneq \Omega$
وهذا يعني أنه يوجد $z\in\Omega$ بحيث $z \notin \bigcap_{I=\emptyset} x_i$ ومنه يوجد $i_0 \in I=\emptyset$
بحيث يكون $z \notin x_{i_0}$ وهذا غير ممكن
إذاً الفرض الجدلي خاطئ ومنه $\bigcap_{I=\emptyset} x_i = \Omega$