« المحاضرة الأولى »

*- المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بأمثال متغيرة :

- شكلها العام - $y'' + P.y' + q.y = 0$ .... $\boxed{1}$

- الحل العام لهذه المعادلة هو على شكل سلاسل قوى لـ x ..

*- تعريف .. $\boxed{1}$ ..

متسلسلة القوى : إن متسلسلة القوى حول x_0 .. هي كل متسلسلة من الشكل التالي :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) \quad \ldots \boxed{2}$$

*- نسمي a_n أمثال (معاملات) متسلسلة القوى ..
ونسمي x_0 .. مركز متسلسلة القوى ..

*- نقول عن هذه المتسلسلة أنها متقاربة .. إذا وجدت النهاية :

$$\left(\lim \sum_{n=0}^{m} a_n (x - x_0)^n \right) \quad \ldots \boxed{3}$$

وتكون هذه النهاية هي مجموع المتسلسلة ..

*- وفي الحالة العاكسة :
أي : إن لم توجد هذه النهاية .. أو .. وجدت ولم تكن محدودة ..
تكون المتسلسلة متباعدة ..

*- تعريف .. $\boxed{2}$ ..

- نقول عن الدالة $y = f(x)$ .. أنها دالة تحليلية عند النقطة x_0 ..
إذا كانت : $f(x)$ .. موجودة عند هذه النقطة ..

*- تعريف .. [3] ..

- نقول عن النقطة x_0 أنها نقطة عادية للدالة $y=f(x)$ ..
إذا كانت $f(x)$ تحليلية عند هذه النقطة ..

*- تعريف .. [4] ..

- نقول عن النقطة x_0 أنها نقطة شاذة للدالة $y=f(x)$ ..
إذا كانت $f(x)$ غير تحليلية عند هذه النقطة ..

*- تعريف .. [5] ..

- نقول عن النقطة x_0 أنها نقطة عادية للمعادلة التفاضلية -[11]-
إذا كانت كل من P و q تحليلية عند النقطة x_0 ..

*- تعريف .. [6] ..

- نقول عن النقطة x_0 أنها نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية -[12]-
إذا كانت كل من P و q غير تحليليتان عند النقطة x_0 .. أو إحداهما.

.. «أمثلة» ..

[11]- $y'' + \overbrace{x^2}^{p} \cdot y' + \overbrace{8x}^{q} \cdot y = 0$

- نلاحظ أن جميع النقاط عادية $\in R$ .. لأن كل من P و q كثيرات حدود ..

[12]- $y'' + \overbrace{\frac{1}{x}}^{p} y' + \overbrace{\frac{1}{x-2}}^{q} y = 0$

- نلاحظ أن جميع النقاط «من R» هي نقاط عادية .. باستثناء
النقطة $(x_0=0)$ .. نقطة شاذة لـ P ..
و النقطة $(x_0=2)$ .. نقطة شاذة لـ q.

Subject: / /

- دراسة نقاط اللانهاية: « عادية أم شاذة » ..

*- نجري التحويل التالي: « $t = \frac{1}{x}$ » ..

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{-1}{x^2} = -t^2 \Rightarrow \left(\!\left(\frac{dt}{dx} = -t^2 \right)\!\right)$$

*- $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -t^2 \cdot y'_t \Rightarrow \left(\!\left(y'_x = -t^2 \cdot y'_t \right)\!\right)$

**- $y''_x = \frac{d}{dx}(y'_x) = \frac{d}{dt} \cdot y'_x \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(-t^2 \cdot y'_t) \cdot (-t^2)$

$$= (-2t \cdot y'_t - t^2 \cdot y''_t)(-t^2)$$

$$= t^4 \cdot y''_t + 2t^3 \cdot y'_t \Rightarrow \left(\!\left(y''_x = t^4 \cdot y''_t + 2t^3 \cdot y'_t \right)\!\right)$$

- نعوض في المعادلة $\boxed{1}$ فنجد:

$$y''_x + P \cdot y'_x + q y = 0 \Rightarrow t^4 \cdot y''_t + 2t^3 \cdot y'_t + P(-t^2 \cdot y'_t) + q y = 0$$

$$\Rightarrow t^4 \cdot y''_t + (2t^3 - Pt^2) y'_t + q y = 0$$

- نقسم على أمثال y''_t ..

$$\Rightarrow y''_t + \frac{2t^3 - Pt^2}{t^4} \cdot y'_t + \frac{q}{t^4} y = 0$$

*- نلاحظ أنه عندما « $t = 0$ » تكون نقطة عادية للمعادلة .. تكون « $x = \infty$ » نقطة عادية ..

*- وعندما تكون « $t = 0$ » نقطة شاذة للمعادلة .. تكون « $x = \infty$ » نقطة شاذة للمعادلة ..

*- تعريف :

*- نسمي النقطة x_0 نقطة شاذة نظامية للمعادلة التفاضلية [I]

إذا كانت الدالتان التاليتان : $\begin{cases}(x-x_0)P \\ (x-x_0)^2 q\end{cases}$

دالتان تحليليتان عند النقطة x_0 ..

، بعبارة أخرى ، .. عندما تكون النقطة x_0 صفراً من الدرجة الأولى على الأكثر لـ P .. وصفراً من الدرجة الثانية على الأكثر لـ q .

**- نسمي النقطة x_0 نقطة شاذة غير نظامية للمعادلة التفاضلية [I]

إذا كانت الدالتان الاثنتان : $\begin{cases}(x-x_0)P \\ (x-x_0)^2 q\end{cases}$

كلاهما أو (إحداهما) غير تحليلية عند النقطة x_0 ..

« خلاصة »

x_0
- عادية
  - p , q تحليليتان
- شاذة
  - نظامية
    - $(x-x_0)P \wedge (x-x_0)^2 q$ تحليليتان
  - غير نظامية
    - $(x-x_0)^2 q \wedge (x-x_0)P$ إحداهما على الأقل غير تحليلية ..

- « أمثلة » ..

*- حدد نوع النقاط للمعادلات التفاضلية التالية :

[1]- $y'' + (x^3 - 3x)y' + x^2 . y = 0$

*- نلاحظ أن كل النقاط «من R» عادية .. لأن : p, q كثيرات حدود.

$\boxed{12}$- $y'' + \frac{1}{x} \cdot y' + \frac{1}{(x-2)^3} \cdot y = 0$

*- نلاحظ أن كل النقاط «من R» عادية .. ماعدا :

«$x_0 = 0$» .. نقطة شاذة نظامية للمعادلة التفاضلية .. وذلك لأنها صفراً من الدرجة الأولى على الأكثر لـ p ..
وصفراً من الدرجة الثانية على الأكثر لـ q ..

«$x_0 = 2$» .. نقطة شاذة غير نظامية للمعادلة التفاضلية .. لأنها صفراً من الدرجة الثالثة لـ q ..

$\boxed{13}$- $y'' + \frac{x(x+1)}{(x-3)^2} \cdot y' + \frac{1}{(x-3)^5} \cdot y = 0$

*- نلاحظ أن جميع النقاط «من R» عادية .. ماعدا :

«$x_0 = 3$» .. نقطة شاذة غير نظامية للمعادلة التفاضلية .. لأنها صفراً من الدرجة الثانية لـ p ..

$\boxed{14}$- $(x^2-1) \cdot y'' + x^2(x-1) y' + (x^2+x) y = 0$

*-

نقسم على أمثال y'' فنجد : $y'' + \frac{x^2(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})(x+1)} \cdot y' + \frac{x(\cancel{x+1})}{(x-1)(\cancel{x+1})} \cdot y = 0$

$$\Rightarrow y'' + \frac{x^2}{(x+1)} \cdot y' + \frac{x}{(x-1)} y = 0$$

$\boxed{II}$- نلاحظ أن كل النقاط «من R» عادية .. ماعدا : «$x_0 = 1 \wedge x_0 = -1$»
نقطتان شاذتان نظاميتان لأن كل منهما صفراً من الدرجة الأولى على الأكثر لـ p, q

ط ((2)). لنبحث عن الدالتين .. $(x-x_0)p \wedge (x-x_0)^2 q$ ..
. نأخذ من المعادلة الأخيرة :

$$p = \frac{x^2}{(x+1)} \wedge q = \frac{x}{(x-1)}$$

- إن جميع النقاط ((من $\mathbb{R}$)) عادية ما عدا $\to x_0 = 1$ ، $x_0 = -1$

*- من أجل $\boxed{x_0 = 1}$ .. نجد :

$$P = (x-x_0).p = (x-1).\frac{x^2}{(x+1)} = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)}$$

$$Q = (x-x_0)^2.q = (x-1)^{\cancel{2}}.\frac{x}{\cancel{(x-1)}} = x(x-1)$$

$\Leftarrow$ Q, P تحليليتان عند النقطة (($x_0 = 1$))
$\Leftarrow$ (($x_0 = 1$)) نقطة شاذة نظامية للمعادلة التفاضلية ..

*- من أجل $\boxed{x_0 = -1}$ .. نجد :

$$P = (x-x_0).p = \cancel{(x+1)}.\frac{x^2}{\cancel{(x+1)}} = x^2$$

$$Q = (x-x_0)^2.q = (x+1)^2.\frac{x}{(x-1)} = \frac{x(x+1)^2}{(x-1)}$$

$\Leftarrow$ Q, P تحليليتان عند النقطة (($x_0 = -1$)) ..
$\Leftarrow$ (($x_0 = -1$)) نقطة شاذة نظامية للمعادلة التفاضلية ..

((تمارين)) - وظيفة -

1 - $(x+1)^2.(x-2)^3.y'' + (x+1).y' + 2y = 0$

2 - $(3x+5)^5.y'' + (3x-5)^4.y' + (3x-5)^3.y = 0$

#