Subject: 11/3/2014

«المحاضرة الثانية»

«مثال» 2 .. من المحاضرة السابقة ..

2 - أثبت أن بساطة «$\|x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}^*} |x_i|$» تحدد نظيماً على ℓ^∞ ..

1 - $\forall i\in\mathbb{N}^*;\ |x_i|\geqslant 0 \Rightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i|\geqslant 0 \Rightarrow \|x\|\geqslant 0$

2 - $\forall x\in\ell^\infty;\ \|x\|=0 \Leftrightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i|=0 \Leftrightarrow |x_i|=0\ ;\ \forall i\in\mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow x_i=0,\ \forall i\in\mathbb{N}^* \Leftrightarrow x=0_{\ell^\infty}$$

3 - $\forall x\in\ell^\infty, \forall\alpha\in\mathbb{R};\ \|\alpha x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|\alpha x_i| = \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|\alpha|.|x_i|$

$$= |\alpha|.\sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i| = |\alpha|.\|x\|$$

4 - $\forall x,y\in\ell^\infty;\ \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$

- لنأخذ:

$\|x+y\| = \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i+y_i|$ .. (*) ..

- ولكن:

$|x_i+y_i|\leqslant|x_i|+|y_i|\leqslant\sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i|+\sup_{i\in\mathbb{N}^*}|y_i|$

إذاً .. $\sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i|+\sup_{i\in\mathbb{N}^*}|y_i|$ .. هو حاد أعلى لـ: $|x_i+y_i|$

- ولكن من (*) نلاحظ أن: $\sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i+y_i|$ هو أصغر حاد أعلى لـ: $|x_i+y_i|$ ..

$$\Rightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i+y_i|\leqslant\sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i|+\sup_{i\in\mathbb{N}^*}|y_i|$$
$$\Rightarrow \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\| \Rightarrow$$

Subject: / /

$\|x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}^*} |x_i|$ .. تحدد نظيماً على ℓ^∞ .. $\Leftarrow (\ell^\infty, \|.\|)$ فضاء منظم ..

#

- فضاء الجداء الداخلي : $\langle .,. \rangle$

- ليكن X فضاء متجهي حقيقي .. ولنعرف الجداء الداخلي بأنه دالة منطلقها الجداء الديكارتي لـ : $X \times X$ .. ومستقرها $\mathbb{R}$ .. بالشكل :

$$X : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle \quad : \text{حيث}$$

ونرمز لهذه الدالة بالإشارة : $\langle .,. \rangle$ ..

وتحقق الشروط الآتية :

$\boxed{1}$ - $\forall x \in X \; ; \; \langle x,y \rangle \geq 0$

$\boxed{2}$ - $\forall x \in X \; ; \; \langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0_X$

$\boxed{3}$ - $\forall x,y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R} \; ; \; \langle \alpha x,y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$.

$\boxed{4}$ - $\forall x,y,z \in X \; ; \; \langle x+z,y \rangle = \langle x,y \rangle + \langle z+y \rangle$

$\langle x,y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$

$\boxed{5}$ - $\forall x,y \in X \; ; \; \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$

ونعبر عن كل فضاء متجهي عرّف عليه دالة الجداء الداخلي ..
بفضاء الجداء الداخلي ..

* - ملاحظة : يمكن تعريف أكثر من جداء داخلي على نفس الفضاء ..

" مثال " ..

- لنعرف على $\mathbb{R}^n$ .. دالة الجداء التالية :

$$\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \quad : \text{حيث}$$

Alamal

حيث أن : $x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \wedge y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

- أثبت أن : $(\mathbb{R}^n,\langle.,.\rangle)$ فضاء جداء داخلي .

- البرهان :

$\boxed{1}$ - $\forall x\in\mathbb{R}^n$; $\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

$\boxed{2}$ - $\forall x\in\mathbb{R}^n$; $\langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2=0 \Leftrightarrow x_i=0 \ , \forall i=1,\dots,n$

$$\Leftrightarrow (x_1,\dots,x_n)=(0,\dots,0) \Leftrightarrow x=0_{\mathbb{R}^n}$$

$\boxed{3}$ - $\forall x,y\in\mathbb{R}^n, \forall\alpha\in\mathbb{R}$; $\langle \alpha x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}(\alpha.x_i).y_i=\alpha.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i=\alpha\langle x,y\rangle$

$$\langle x,\alpha y\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i.(\alpha.y_i)=\alpha.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i=\alpha\langle x,y\rangle$$

$\boxed{4}$ - $\forall x,y,z\in\mathbb{R}^n$; $\langle x+z,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}(x_i+z_i).y_i$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i.y_i)+(z_i.y_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i+\sum_{i=1}^{n} z_i.y_i$$

$$=\langle x,y\rangle+\langle z,y\rangle$$

- وبنفس الطريقة نجد أن : $\langle x,z+y\rangle=\langle x,z\rangle+\langle x,y\rangle$

$\boxed{5}$ - $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$; $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i=\sum_{i=1}^{n} y_i.x_i=\langle y,x\rangle$

$\Leftarrow$ $(\mathbb{R}^n,\langle,\rangle)$ فضاء جداء داخلي .

#

(مربع النظيم هو جداء داخلي دوماً ..)

Subject: ....   /   /

علاقة فضاء الجداء الداخلي بالفضاء المنظم :

*- مبرهنة :

- ليكن X فضاء جداء داخلي ، ولتكن الدالة الحقيقية $\|.\|$ المعرفة بالشكل :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

عندئذٍ : *- الدالة $\|.\|$ تحدد نظيماً على X.

**- هنا النظيم يحقق متراجحة كوشي شفارتز :

$$\forall x,y \in X \,;\, |\langle x;y\rangle| \geq \|x\| . \|y\|$$

- البرهان :

$\boxed{1}$ - $\forall x \in X \,;\, \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \geq 0$

$\boxed{2}$ - $\forall x \in X \,;\, \|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x,x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0_X$$

$\boxed{3}$ - $\forall x \in X ,\, \forall \alpha \in \mathbb{R} \,;\, \|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x,x\rangle}$

$$= |\alpha| . \sqrt{\langle x,x\rangle} = |\alpha| . \|x\|$$

$\boxed{4}$ - $\forall x,y \in X \,;\, \|x+y\| = \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle}$

- نربع الطرفين :

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\langle x,y\rangle \quad \text{بسبب التناظر}$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$$

- حسب متراجحة كوشي شفارتز .

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| . \|y\|$$

Subject: / /

$$\leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

⇐ متراجحة المثلث محققة ..

⇐ $\|.\|$ تحدد نظيماً على X ..

⇐ $(X, \|.\|)$ فضاء منظم ..

#

#