«المحاضرة السادسة»

3* حلقة الحدوديات : Ring of Polynomial

3.1 .. تعريف :

- لتكن R حلقة ، نقول عن التركيب المنتهي ..

$$f(x) = a_n . x^n + a_{n-1} . x^{n-1} + \dots + a_1 . x + a_0$$

أنه حدودية معرفة على R ، حيث أن : $n \in \mathbb{N}$ و x مجهول .

1- ندعو a_n المعامل الرئيسي «leading coffiecient» .. ونرمز له بالرمز :

$$\mathcal{L}(f) = a_n ..$$

2- ندعو n بـ : درجة الحدودية f ونرمز لها بالرمز $n = deg(f)$ ..

حيث أن : $a_n \neq 0$ ..

3- إذا كان $\mathcal{L}(f) = 1$ ، فإن : f تدعى حدودية واحدية - Monic Polynomial .

4- إذا كان $f \in R$ ، فإن : f تدعى حدودية ثابتة و $deg(f) = 0$

5- إذا كانت $f = 0$ ، فإن : $deg(f) = \overset{\text{مجرد اصطلاح}}{ص}$ ..

6- نعرف مجموعة كل الحدوديات المعرفة على R بالشكل :

$$R[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i . x^i : n \in \mathbb{N} , a_i \in R \right\}$$

. والتي تشكل حلقة مع قانوني التشكيل :

$(+)$, $(\cdot)$ المعرفين كما يلي :

Subject: /   /

لتكن: $f=\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \; , \; g=\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot x^j \in R[x]$

عندئذ:

* - $f+g=\sum_{i=0}^{t}(a_i+b_i)\cdot x^i \quad : t=\max[n,m] \wedge a_i=0 , b_i=0 \wedge i>t$

** - $f\cdot g=\sum_{k=0}^{m+n} c_k \cdot x^k \quad : c_k=\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j$

أمثلة توضيحية:

1 - $f(x)=2x^3+x^2-2x+1 \;\wedge\; g(x)=3x^2+2x+3 \in \mathbb{Z}[x]$

عندئذ لدينا:

- $\mathcal{L}(f)=2 \;\wedge\; \mathcal{L}(g)=3$
- $\deg(f)=3 \;\wedge\; \deg(g)=2$
- $\begin{cases} a_0=1 , a_1=-2 \\ a_2=1 , a_3=2 \end{cases} \wedge \begin{cases} b_0=3 , b_1=2 \\ b_2=3 \end{cases}$

- $n=3 \;\wedge\; m=2 \Rightarrow \max\{2,3\}=3$

$\Rightarrow$ * - $f+g=\sum_{i=0}^{3}(a_i+b_i)\cdot x^i=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3$
$= 4+0x+4x^2+2x^3$

$\Rightarrow f+g=2x^3+4x^2+4$

** - $f\cdot g=\sum_{k=0}^{5} c_k \cdot x^k = c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5$

$\boxed{k=i+j}$

$\Rightarrow c_0=a_0+b_0 \;\wedge\; c_1=a_0\cdot b_1+b_0\cdot a_1$

$c_2=a_0\cdot b_2+a_2\cdot b_0+a_1\cdot b_1 \;\wedge\; c_3=a_0\cdot b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0$

$c_4=a_0b_4+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0$

$c_5=a_0b_5+a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1+a_5\cdot b_0$

* ملاحظة :

[1]- إذا كانت R حلقة واحدية فإن $R[x]$ حلقة واحدية .

[2]- إذا كانت R حلقة تبديلية فإن $R[x]$ حلقة تبديلية .

3 - 2 .. مبرهنة : « خوارزمية القسمة في حلقة الحدوديات وبعقول واحد »

- لتكن لدينا : $f(x), g(x) \in R[x]$ ، و R حلقة واحدية .. عندئذٍ :
إذا كان : $\ell(g)$ or $\ell(f)$ قابلاً للقلب فإنه يوجد حدوديتين وحيدتين .. $q(x), r(x) \in R[x]$ .. بحيث :

$$f = g.q + r \quad ; \quad r(x) = 0 \lor \deg(r) < \deg(g)$$

الإثبات : سوف نميز الحالات التالية :

$\boxed{1}$- $f = 0 \Rightarrow r, q = 0 : (\forall g) \Rightarrow f = gq + r$ «محققة»

\#

$\boxed{2}$- $f \neq 0 \Rightarrow$ نميز حالتين :

$\boxed{1}$- if $\deg(f) < \deg(g)$

نختار : $q = 0 \land r = f$ $\Leftarrow$ $f = gq + r$ «محققة» $\Leftarrow$

$\boxed{2}$- if $\deg(g) \leqslant \deg(f)$

- يتم الإثبات بواسطة الاستقراء الرياضي : (على $\deg(f)$) «

عندئذٍ : إنّ :

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i . x^i \Rightarrow \deg(f) = n \ : \ a_n \neq 0$$

$$\land \ g = \sum_{j=0}^{m} b_j . x^j \Rightarrow \deg(g) = m \ : \ b_m \neq 0$$

* عندما «$n = 0$» $\Leftarrow$

$$\deg(f) = \deg(g) = 0 \Rightarrow (f, g \in R)$$

$$\Rightarrow f = f.g^{-1}.g + 0 \ : \ r = 0 \land q = f.g^{-1}$$

⇐ الفرضية محققة لأجل «$n=0$».

**- نفرض صحة الفرضية لأجل كل حدودية درجتها أقل من n ..

أي :

هـ حدودية جديدة تحقق بحيث تكون درجتها n

$$h(x) = f - a_n \cdot b_m^{-1} \cdot x^{n-m} \cdot g \in R[x]$$

$$h(x) = (a_n x^n + \dots) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} (b_m x^m + \dots)$$

وبالتالي : $\deg((h(x))) < n$.

⇐ يوجد حدوديتين وحيدتين $q, r \ni R[x]$ بحيث :

كل منها تحقق :

$$h = qg + r \quad ; \quad r = 0 \vee \deg(r) < \deg(g)$$

وذلك « حسب الفرض الاستقرائي »

- الآن نعوض وننقل للطرف الآخر ونجمع فنجد :

$$f = (a_n \cdot b_m^{-1} \cdot x^{n-m} + q_1) \cdot g + r$$

$$\Longrightarrow f = q \cdot g + r \quad \wedge \quad \text{«} r \text{ تحقق»} \begin{cases} \xrightarrow{\text{إما}} r = 0 \\ \xrightarrow{\text{أو}} \deg(r) < \deg(g) \end{cases}$$

- برهان الوحدانية :

- لنفرض أنه يوجد حدوديتين أخرتين : $r_1 \wedge q_1 \in R[x]$

تحققان :

$$f = q_1 \cdot g + r_1 \quad ; \quad r_1 = 0 \vee \deg(r_1) < \deg(g)$$

* لنفرض جدلاً أن «$r_1 \neq r$» ..

ومن جهة أخرى نجد أن : -*- «$f = qg + r$»

$$\Longrightarrow (q_1 - q) g = (r - r_1) \Longrightarrow$$

$$\deg(g) \leq \deg((q_1-q)g) = \deg(r-r_1)$$

$\Leftarrow$ (($r_1=0$ لم يعد محققاً .. $\Leftarrow$ من (**) نجد أن:

$$\deg(r) < \deg(g)$$

$$\Rightarrow \deg(g) \leq \deg((q_1-q)g) = \deg(r-r_1) < \deg(g)$$

$$\Rightarrow \deg(g) < \deg(g) \Rightarrow$$ تناقض

- عندئذٍ الفرض الجدلي خاطئ .. فـ

$$r_1 = r \xRightarrow[g\neq 0]{} q_1 - q = 0 \Rightarrow q_1 = q$$

#

3.3 .. مبرهنة:

- إذا كانت R حلقة وكانت $f, \overset{\neq 0}{g} \in R[x]$ حدوديتين غير صفريتين:
عندئذٍ فإن القضايا التالية صحيحة:

$\boxed{1}$ - $\text{if}: \deg(f.g) \leq \deg(f) + \deg(g)$
$\wedge (\mathcal{L}(g) \vee \mathcal{L}(f) \in U(R)) \Rightarrow$

$$\deg(f.g) = \deg(f) + \deg(g)$$

$f(x) = 3x^3 + 2x + 1$
$\wedge g(x) = 2x^2 - x + 3 \in \mathbb{Z}_6[x]$
$\deg(f.g) = 4 \leq$
$\deg(f) + \deg(g) = 3+2 = 5$

$\boxed{2}$ - $\deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$

$f = -x^3 + 3 + 1$
$\wedge g = x^3 + x^2 - 10$

«الإثبات» $\boxed{1}$ - لتكن:

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i . x^i \quad \wedge g = \sum_{j=0}^{m} b_j . x^j \in R[x]$$

ونفرض أن: $deg(f) = n$ ؛ $a_n \neq 0$ ، $deg(g) = m$ ؛ $b_m \neq 0$

- وحسب التعريف:

$$f.g = \sum_{k=0}^{m+n} c_k \cdot x^k \quad : \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j$$

* عندئذٍ:

$$c_{m+n} = a_0 \cdot b_{m+n} + a_1 \cdot b_{(m+n)-1} + \cdots + a_{(m+n)-1} \cdot b_1 + a_{m+n}\, b_0$$

$$= a_n \cdot b_m$$

«لأن ممكن تكون $a_n \cdot b_m = 0$»

$$\Rightarrow deg(f.g) \leq m+n = deg(g) + deg(f)$$

* نفرض جدلاً أن: «$c_{m+n} = 0$»

$$\Rightarrow a_n \cdot b_m = 0 \Rightarrow a_n^{-1} \cdot 0 = a_n^{-1} \cdot a_n \cdot b_m \Rightarrow 0 = b_m$$

⟸ غير ممكن ، لأن: $b_m \neq 0$ «مفروض» .. لأنه كنا مطالبين مقابل للعكس تحقق «$c_{m+n} = 0$»

⟸ الفرض الجدلي خاطئ ⟸ أصبحت المتراجحة مساواة ..

وبعبارة أخرى: «$f.g = c_{m+n} \cdot x^{m+n} + c_{m+n-1} \cdot x^{m+n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$»

#

- [2]

$$f+g = \sum_{i=0}^{t} (a_i + b_i) \cdot x^i = (a_t + b_t)x^t + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

$$\Rightarrow deg(f+g) \leq t$$

- ولكن t حسب التعريف هي «max» .. أي: $t = max[n, m]$

$\Rightarrow t = \max[\deg(f), \deg(g)]$

\#

- سؤال :

*- أثبت أن : إذا كان R منطقة تكاملية فإن $R[x]$ هي منطقة تكاملية .

**- هل إذا كان R حقل تكون $R[x]$ حقل ..

- الإثبات :

*) - مطلوب .

**) - لنفرض جدلاً أن $R[x]$ حقل ، أي أن :

$\forall f(x), g(x) \in R[x]/R$ ، $f(x) . g(x) = 1$

$$\Rightarrow \deg(f.g) = \underbrace{\overset{\neq 0}{\deg(f)} + \overset{\neq 0}{\deg(g)}} = \deg(1) = 0$$

«لأنهما ليسا من R ← درجة كل منهما > 0 «لأنهما حدوديتان غير ثابتتان» ..»

⇐ تناقض ~~[illegible]~~

⇐ الفرض الجدلي خاطئ و $R[x]$ ليس حقل ..

\#

« قابلية للاختزال حيث يمكن كتابتها من شكل جداء حدوديتين »
Subject: 0 < ... كل جداء

3 - 4 .. تعريف :

- لتكن : $f(x) \in R[x]$ - حدودية - عندئذٍ نقول أن $f(x)$ ~~[illegible]~~ قابلة للاختزال في $R[x]$ ،
«reducible»

إذا وفقط إذا ، تحقق :

$$\exists\, h, g \in R[x] : f = g \cdot h$$

$$\wedge \quad 0 < \deg(g) < \deg(f)$$
$$0 < \deg(h) < \deg(f)$$

- أمثلة :

[1] - $f(x) = 3x^2 + 6 = 3 \cdot (x^2 + 2) \rightarrow$ غير قابلة للاختزال.

[2] - $f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) \rightarrow$ قابلة للاختزال

[3] - $f(x) = x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x] = x \cdot (x+1) \rightarrow$ قابلة

[4] - $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x] \rightarrow$ غير قابلة للاختزال في $\mathbb{R}[x]$
- لكنها في $\mathbb{C}[x]$ قابلة .

3 - 5 .. مبرهنة : « معيار أيزنشتاين » .

- لتكن لدينا

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$$

إذا كان p عدد أولي ، وكان :

$$a_i \equiv 0 \pmod{p} \quad : i \in [0, \dots, n-1]$$

$a_0 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$

$a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$

فإن: f غير قابلة للاختزال على $\mathbb{Q}$ ..

الإثبات: . تقبل دون إثبات .

* . تمرين:

- بيّن أن الحدودية: $f(x) = 8x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 9x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$
غير قابلة للاختزال على $\mathbb{Q}$ ..

- وظيفة .

* . ملاحظة:

- إن معيار آيزنشتاين يختبر فقط ما إذا كانت الحدودية غير قابلة للاختزال
وإن لم يتحقق المعيار فليس بالضرورة أن يكون قابل .

#