المحاضرة الحادية عشرة

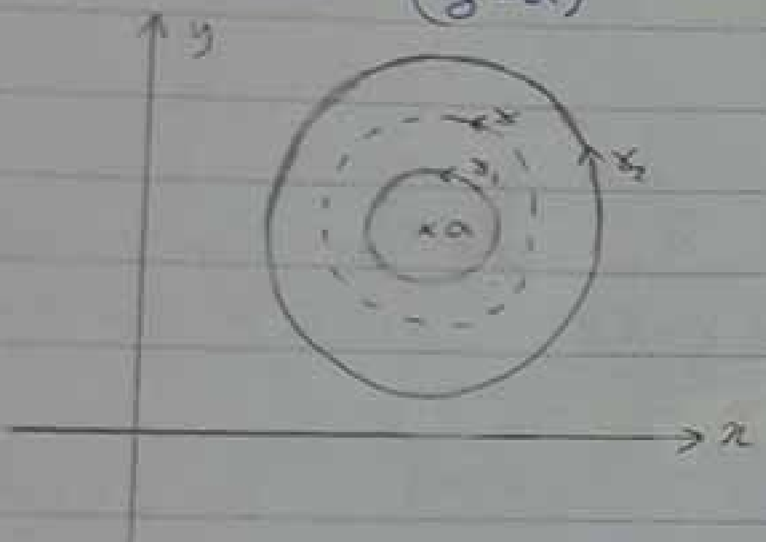
الثلاثاء 15/4/2014

مبرهنة لوران :

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي على $R(a,r_1,r_2)$ ولنفرض $\gamma_1 = C(a,r_1)$ و $\gamma_2 = C(a,r_2)$ منحنيين دائريين واقعين على محيط الحلقة عندئذٍ يمكن كتابة التابع $f(z)$ على الشكل التالي :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$



$$; \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} \, dz$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz$$

حيث γ منحني دائرة واقعة داخل الحلقة

نسمي هذه المتسلسلة بمتسلسلة لوران للتابع $f(z)$ عند النقطة a.

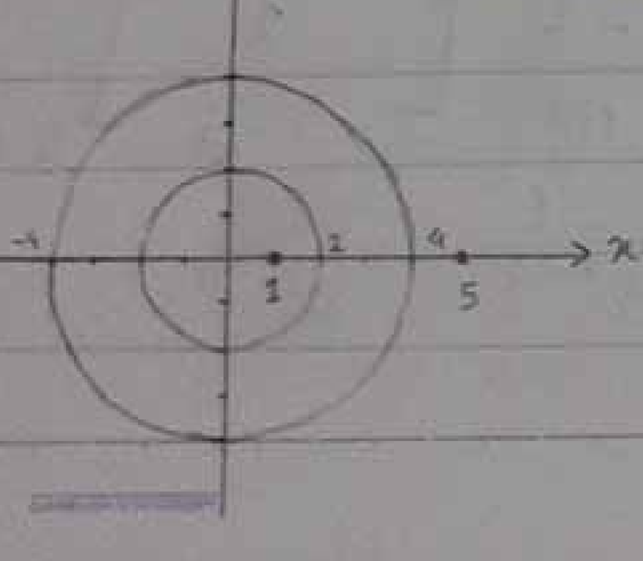
نسمي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$ بالجزء الرئيسي

كما نسمي المتسلسلة $\sum a_n (z-a)^n$ بالجزء التحليلي.

تمرين: أوجد متسلسلة لوران للتابع :

$$f(z) = \frac{4}{z^2 + 6z + 5}$$

في الحلقة $R(0,2,4)$ [أو انشر في الحلقة].



الحل: نضع

$$f(z)=\frac{4}{(z-1)(z-5)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-5}$$

نلاحظ أن التابع $f(z)$ تحليلي في الحلقة $R(0,2,4)$ وبالتالي حسب مبرهنة لوران يمكن كتابة التابع $f(z)$ كما يلي:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^{n}}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \quad ، \quad a=0$$

بفرض γ منحني دائرة واقعة في الحلقة عندئذٍ:

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z^{-n+1}}$$

$$=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{z^{n+1}}{(z-1)}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{z^{n-1}}{(z-5)}dz$$

هذا التكامل معدوم حسب كوشي لأن التابع تحليلي على γ

1 نقطة شاذة

5 نقطة شاذة

حسب صيغة كوشي التكاملية

$$=-1+0=-1$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

$$=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z^{n+1}(z-1)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z^{n+1}(z-5)}$$

$$=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\frac{dz}{z^{n+1}}}{(z-1)}+\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\frac{dz}{z-1}}{z^{n+1}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\frac{dz}{z-5}}{z^{n+1}}$$

نشتق n مرة حسب صيغ كوشي التكاملية

حسب صيغ كوشي التكاملية

$$=-1+\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{1-z}\right]^{(n)}_{z=0}+\frac{-1}{n!}\left[\frac{1}{5-z}\right]^{(n)}_{z=0}$$

$$=-1+\frac{1}{n!}\frac{n!}{1}-\frac{1}{n!}\frac{n!}{5^{n+1}}=\frac{-1}{5^{n+1}}$$

ومنه :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} z^n$$

★ طريقة ثانية :

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{-1}{5-z} \quad , \quad 2 < |z| < 4$$

$$= \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{-1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{5}}$$

$$= \frac{-1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{-1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{z^n}}_{\text{الجزء الرئيسي}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} z^n}_{\text{الجزء التحليلي}}$$

مثال : أوجد متسلسلة لوران للتابع :

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$$

وذلك في المناطق التالية :

$\boxed{1}$ $|z| < 1$

$\boxed{2}$ $|z| > 2$

$\boxed{3}$ $1 < |z| < 2$

الحل :

نضع :

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{-2}{z^2+1}$$

من أجل $|z| < 1$:

$$f(z) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{2}\right)} - 2 \frac{1}{1+z^2}$$

$$= \frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n}$$

يجب أن يكون الطويلة < 1

من أجل $|z| > 2 \rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2}$

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{2}{z^2} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{2}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{z^{2n}}$$

ملحوظة: بما أن النشر في جوار اللانهاية فإن الأجزاء الظاهرة ستكون رئيسية.

من أجل $1 < |z| < 2$:

$$f(z) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{2}{z^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-z^n}{2^{n+1}}}_{\text{الجزء التحليلي}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{z^{2n}}}_{\text{الجزء الرئيسي}}$$

* وظيفة: أوجد متسلسلة لوران للتوابع التالية:

$\boxed{1}$ $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3z+2}$ ؛ $1 < |z| < 2$

$\boxed{2}$ $f(z) = \dfrac{5z+2i}{z(z+i)}$ ؛ $1 < |z-i| < 2$

$\boxed{3}$ $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ ؛ $z \in R(1,0,\infty) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$