قاعدة :

1. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ = عدد طرق اختيار k شيء من بين n شيء (دون النظر إلى الترتيب)
2. $A_n^k = k!\ C_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ = عدد طرق اختيار k شيء من بين n شيء ومن ثم ترتيبهم في k مكان.

حل التمارين في المحاضرة السابقة :

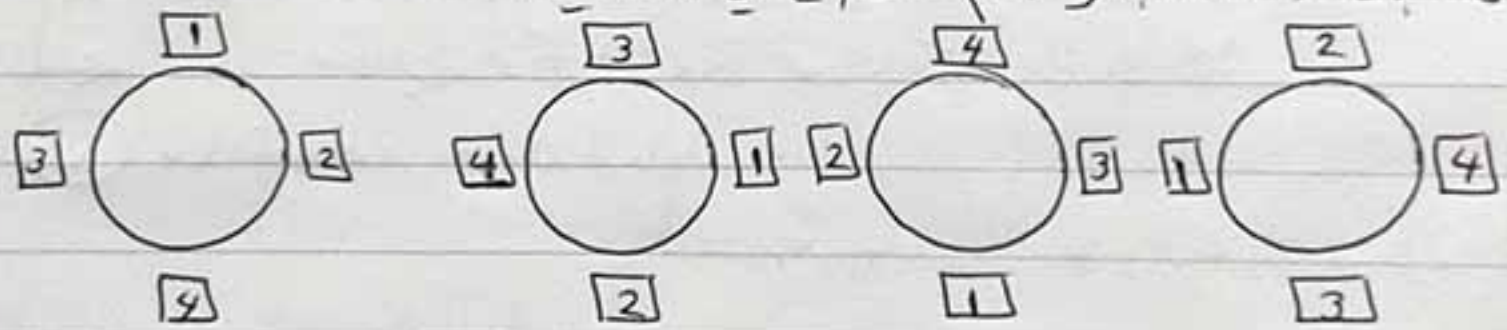
1. بكم طريقة يمكن جلوس 4 أشخاص على أربع كراسي موضوعة بشكل مستقيم؟ (الأشخاص مختلفين حتى مشى!)

الحل : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ طريقة

4 : عدد طرق جلوس الشخص الأول
3 : عدد طرق جلوس الشخص الثاني

2. بكم طريقة يمكن جلوس 4 أشخاص على طاولة مستديرة تحوي 4 كراسي؟

الحل : بالاستعانة بالرسم التوضيحي التالي :



يكون عدد الطرق = $\frac{4!}{4} = 3!$

ملحوظة: لو كانت الكراسي ملونة أو مرقمة بأرقام مختلفة فالجواب 4!

تمرين : 1) بكم طريقة يمكن جلوس شخص وزوجته على 4 كراسي؟

$A_4^2 = 4 \times 3 = 12$ طريقة

4 : الشخص الأول
3 : الشخص الثاني

ب) بكم طريقة يمكن توزيع كرتان إحداهما بيضاء والأخرى سوداء على 4 صناديق {

شرط كم عنصر يجب كي يكون على الأكثر؟

الحل: $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$

ملحوظة: لو لم يذكر شرط على الأكثر لكان الحل: $4 \times 4 = 16$ طريقة.

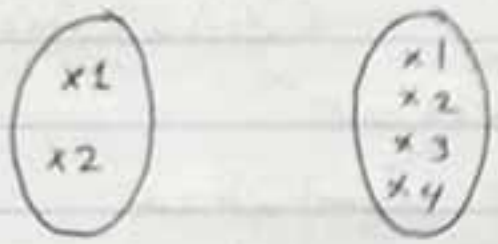
3) ما هو عدد التوابع المتباينة من [2] إلى [4]؟

الترتيب مهم

طريقة $4 \times 3 = 12$

عدد طرق اختيار $f(1)$ عدد طرق اختيار $f(2)$

(لا يمكن أن يكون $f(1)$ من المستقر) من المستقر



4) ما هو عدد عناصر المجموعة:

$$X = \{(m,n) \in [4]^2 : m \neq n\}$$

الحل: $X = A^2_{[4]} \Rightarrow |X| = A^2_4 = 4 \times 3 = 12$

ملحوظة: لو كانت $m=n$ لكانت عدد العناصر 4.

5) ما هو عدد الأعداد الطبيعية التي آحادها وعشراتها أصغر تماماً من 4 ولا تقبل القسمة على 11 و أصغر من 100؟؟

الحل: لتكن A المجموعة المطلوبة:

$$A = \{a + 10b \; ; \; a,b \in \{0,1,2,3\} \; ; \; a \neq b\}$$

(عشرات ← آحاد)

هذا الشرط حتى لا يقبل العدد القسمة على 11

ملاحظة: إن هذه الكتابة للعدد وحيدة أي:

$$a + 10b = a' + 10b' \Leftrightarrow a = a' \wedge (b = b')$$

البرهان: لنفرض أن:

$$a + 10b = a' + 10b'$$

$$a - a' = 10(b' - b)$$

$a - a' \in \{0, \dots, 9\}$ ⇒

ولنفرض جدلاً أن $b' > b$

بما أن أصبح الطرف الأيمن أكبر من 10 و الطرف الأيسر بين 0 و 9 وهذا غير ممكن مما سيدعي كون $b' - b = 0$ و الفرض الجدلي خاطئ ⇐

$b = b'$ و $a - a' = 0$ ⇐ $a = a'$ والكتابة وحيدة.

وبالتّالي يكون الحل كالتّالي: $|A| = 4 \times 3 = 12$

ملحوظة: لو كان العدد يقبل القسمة على 11 عندئذٍ فإنّ عدد عناصر المجموعة X هو 4 عناصر فقط.

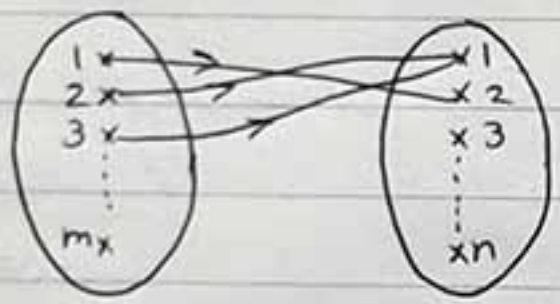
تمرين: بكم طريقة يمكن توزيع m كرة على n صندوق دون أي شروط؟

الحل: (طريقة أولى):

$$\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{m \text{ مرة}} = n^m$$

- n ← عدد طرق توزيع الكرة الأولى على n صندوق
- n ← عدد طرق توزيع الكرة رقم m على n صندوق.

(طريقة ثانية):



إنّ عدد طرق توزيع m كرة في n صندوق يساوي عدد التوابع من $[m]$ إلى $[n]$ وهو:

$$|F([m],[n])| = n^m$$

تمرين: ما هو عدد عناصر المجموعة:

$$\{(m,n) \in [4]^n : m < n\} = Y$$

الحل: $|Y| = |\{\{m,n\} \subset [4]\}| = C_4^2 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

انتهت المحاضرة الخامسة