الموضوع : مقدمة عن الدّوال

١- تعريف الدّالـة
٢- الدالـة المطردة / نتائج / أمثلـة
٣- الدّالـة المحدودة / نتائج
٤- نهايـة دالـة عند نقطة / أمثلة.
٥- استمرار دالـة عند نقطة.
٦- نقاط الانقطاع / أمثلـة.
٧- القفزة / مبرهنات
٨- الاشتقاق / مبرهنات.
٩- الدّوال المركبة.
١٠- تمارين.

المراجع : تحليل (5) د. بجبوح ، د. ملحي.
تحليل (5) د. خضر الأحمد
تحليل (5) د. ابراهيم ابراهيم.

الفصل الأول:
١- مقدمة عن الدّوال
٢- تعريف الدّالـة ذات المتغير المحدود
٣- خواص الدّالـة ذات المتغير المحدود.
٤- معايير الدّالـة ذات المتغير المحدود.
٥- تطبيقات الدّالـة ذات المتغير المحدود.

١- تعريف الدّالـة: $f : X \longrightarrow Y$

$\forall x \in X : \exists! y \in Y ; y = f(x)$

إذا كانت $X, Y \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$ f تابع حقيقي / عددي

٢- الدّالـة المطردة:

نقول عن دالّة معرّفة بالشكل $f : I \subseteq \mathbb{R}$ إنها مطردة على I إذا كانت متزايدة أو متناقصة أو متزايدة تماماً أو متناقصة تماماً.

f متزايدة: $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

f متزايدة تماماً: $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

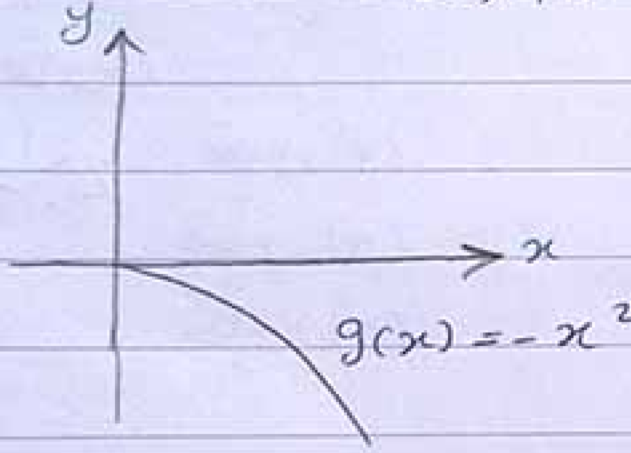
f متناقصة: $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

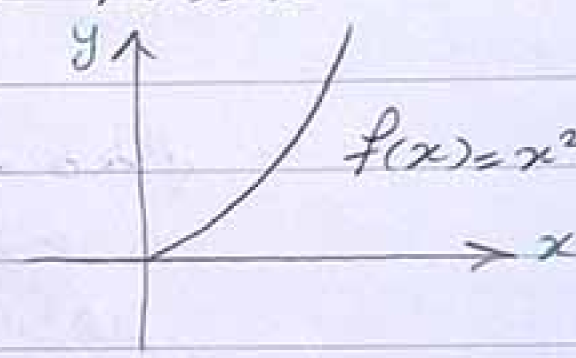
f متناقصة تماماً: $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

نتائج: ١- إذا كان f متزايداً على I فإنّ $-f$ متناقص على I.

٢- f متناقص على I $\Leftarrow$ $-f$ متزايد على I.

مثال: $f(x) = x^2$ متزايد على $[0, +\infty[$





٣- الدّالة المحدودة: نقول عن الدّالة f المعرّفة على I إنها محدودة على I إذا تحقق الشرط:

$$\forall x \in I : \exists M > 0 \; ; \; |f(x)| \leq M$$
$$M \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M$$

التمييز: تعريف آخر للمحدودية حيث تكون الدّالة f محدودة إذا كانت محدودة من الأدنى ومحدودة من الأعلى وندعو m بحد أدنى و M بحد أعلى للدالة f.

نتائج: ١- إذا كانت الدّالة f معرّفة ومطردة على المجال $[a,b]$ فإنها محدودة

$$\forall x \in [a,b] : \exists ! f(x) \in \mathbb{R}$$

٢- f متزايد: $\forall x \in I \Rightarrow f(x) \leq f(b)$

٢- f متناقص : $\forall x \in I \Rightarrow f(a) \geq f(x)$

٤- نهاية دالة عند نقطة :

نقول عن دالة f المعرّفة في جوار x_0 (بحيث أنّ f ليس بالضرورة أن يكون معرّفاً على x_0) أنّ لها نهاية عند x_0 إذا كان :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$$

قيمة موجودة ومحدودة

ونستعمل طف : $f(x_0+0) = f(x_0-0) = A$

مثال (1) : هل للتابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ نهاية عند $x=0$ ؟

الحل :

نلاحظ أنّ : $\lim_{x \gtrless 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \notin \mathbb{R}$

⇐ ليس للتابع نهاية عند $x=0$ ، معرّف على $\mathbb{R}^*$

مثال (2) : هل للتابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ نهاية عند $x=0$ ؟

الحل :

نلاحظ أنّ $\lim_{x \gtrless 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \in \mathbb{R}$

مثال (3) : هل للتابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ نهاية عند $x=1$ ؟

الحل :

نلاحظ أنّ $\lim_{x \gtrless 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \gtrless 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = 2$

وبالتالي للتابع $f(x)$ نهاية عند $x=1$ ولكن نلاحظ أنّ التابع غير معرّف عند $x=1$

$\lim_{x \to \infty} \cos x =$ عدم تعيين

ملاحظة رياضية

$\lim_{n \to \infty} \cos 2\pi n = 1 \quad ; n \in \mathbb{N}$

لأنّ $\{\cos 2\pi n\}$ هي متتالية جميع عناصرها واحدات فهي تسعى إلى الواحد.

٥- الاستمرار عند نقطة : نقول عن التابع f المعرّف في جوار x_0 إنّه مستمر عند x_0 إذا تحقق الشرط :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$$

لذلك من الضرورة أن يكون التابع مُعرّف عند x_0

وبشكل مكافئ :

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$$

ملاحظة : حتى يتم الاستمرار على مجال مغلق $[a,b]$ يجب أن يتحقق :

1) $\forall x_0 \in]a,b[$:

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$$

2) $\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f(a+0) = f(a)$

3) $\lim_{x \xrightarrow{<} b} f(x) = f(b) \Leftrightarrow f(b-0) = f(b)$

٦- نقطة الانقطاع : نقول عن النقطة x_0 أنها نقطة انقطاع للدالة f إذا كان f غير مستمر عندها ولها نوعين :

- نقطة انقطاع من النوع الأول : نقول عن النقطة x_0 أنها نقطة انقطاع من النوع الأول إذا كان :

$$f(x_0+0) \in \mathbb{R} \quad , \quad f(x-0) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \text{إذا كان :} \ f(x_0+0) = f(x_0-0) \rightarrow x_0 \ \text{نقطة قابلة للإزالة} \\ f(x_0+0) \neq f(x_0-0) \quad \text{ليس لها تسمية} \end{cases}$$

مثال : ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ هل النقطة $x=0$ نقطة انقطاع ؟ هي من النوع الأول ؟ هل هي قابلة للإزالة أم لا ؟

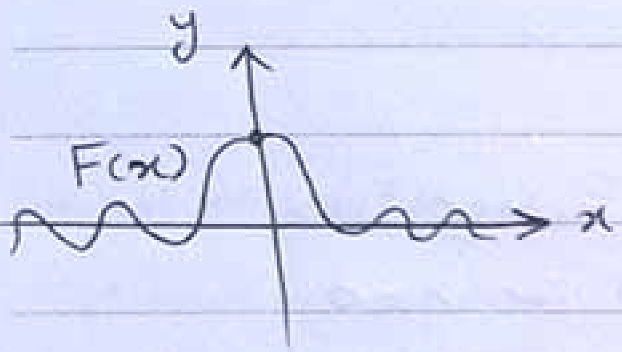
الحل : نلاحظ أنّ التابع $f(x)$ غير مستمر عند $x=0$ لأنّه غير مُعرّف

عندها وبالتالي فإن النقطة $x=0$ هي نقطة انقطاع، كما أنها نقطة انقطاع من النوع الأول لأن:

$$f(x_0+0)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \in \mathbb{R}$$

$$f(x_0-0)=\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \in \mathbb{R}$$

كما أنها قابلة للإزالة لأنه يمكن إيجاد تابع جديد بحيث يكون مستمراً على كامل $\mathbb{R}$ ويدعى تمديد التابع $f(x)$ ونعرفه بالشكل:



$$F(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x=0 \end{cases}$$

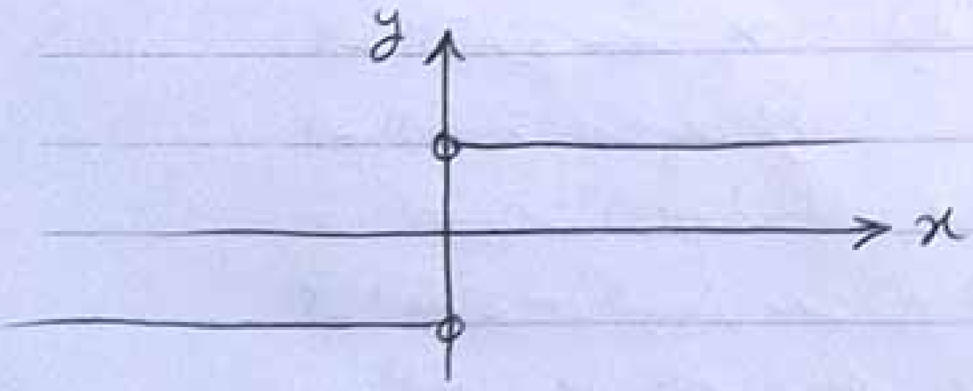
مثال: ادرس نقاط الانقطاع للدالة $g(x)$ عند الصفر.

الحل:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-x}{x} = -1 \in \mathbb{R}$$

وهي نقطة انقطاع من النوع الأول ولكنها غير قابلة للإزالة لأنه لا يمكن تمديد التابع $g(x)$ بحيث يصبح مستمراً على $\mathbb{R}$



- نقطة انقطاع من النوع الثاني: نقول عن نقطة الانقطاع أنها من النوع الثاني إذا كانت إحدى النهايتين في اللانهاية أو غير موجودة.

مثال: ليكن لدينا التابع المعرف بالشكل:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & ; x>0\\ x^2 & ; x\leq 0\end{cases}$$

والمطلوب: ابحث عن نقاط الانقطاع لهذا التابع وما نوع نقطة الانقطاع؟

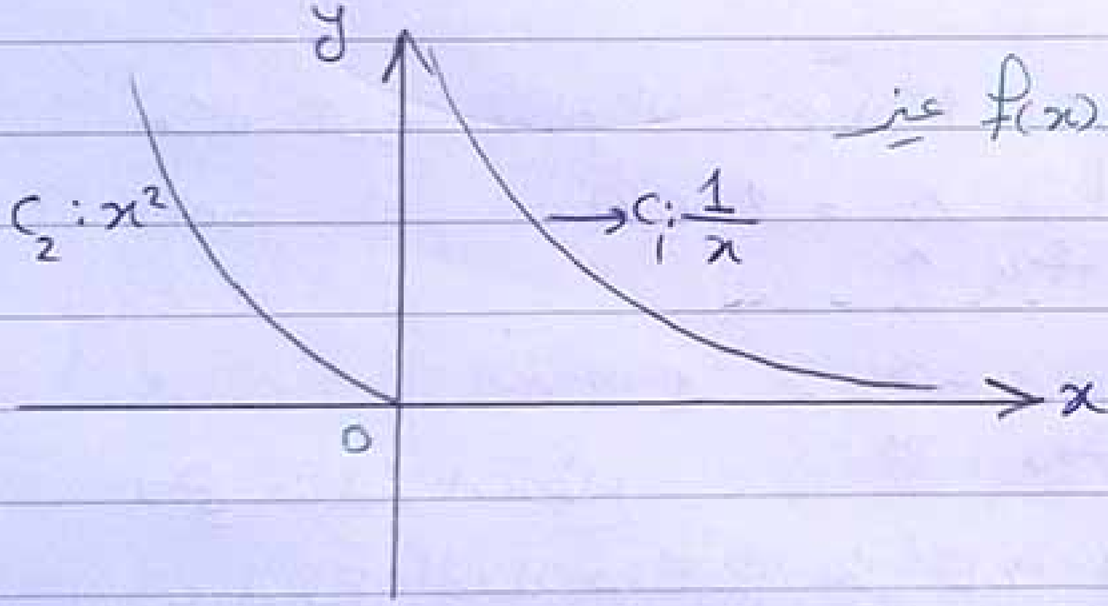
الحل: نقطة الانقطاع هي الصفر

$$\lim_{x \geq 0} f(x)=\lim_{x\geq 0}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\leq 0} f(x)=\lim_{x\leq 0} x^2=0 \quad , \quad f(0)=0$$

وبالتالي فإن هذا التابع غير مستمر عند $x=0$ من اليمين ولكنه مستمر من اليسار فقط

إذن نقطة الانقطاع هذه هي من النوع الثاني.



يمكن الملاحظة من الرسم أن $f(x)$ غير مستمر عند $x_0=0$

٧- القفزة عند x_0: ليكن $x_0 \in [a,b]$ عندئذٍ:

١- القفزة عند x_0 هي: $f(x_0+0)-f(x_0-0)$

٢- القفزة من اليمين عند x_0 هي: $f(x_0+0)-f(x_0)$

٣- القفزة من اليسار عند x_0 هي: $f(x_0)-f(x_0-0)$

٤- القفزة من اليمين عند a هي: $f(a+0)-f(a)$

٥- القفزة من اليسار عند b هي: $f(b)-f(b-0)$

مبرهنات:

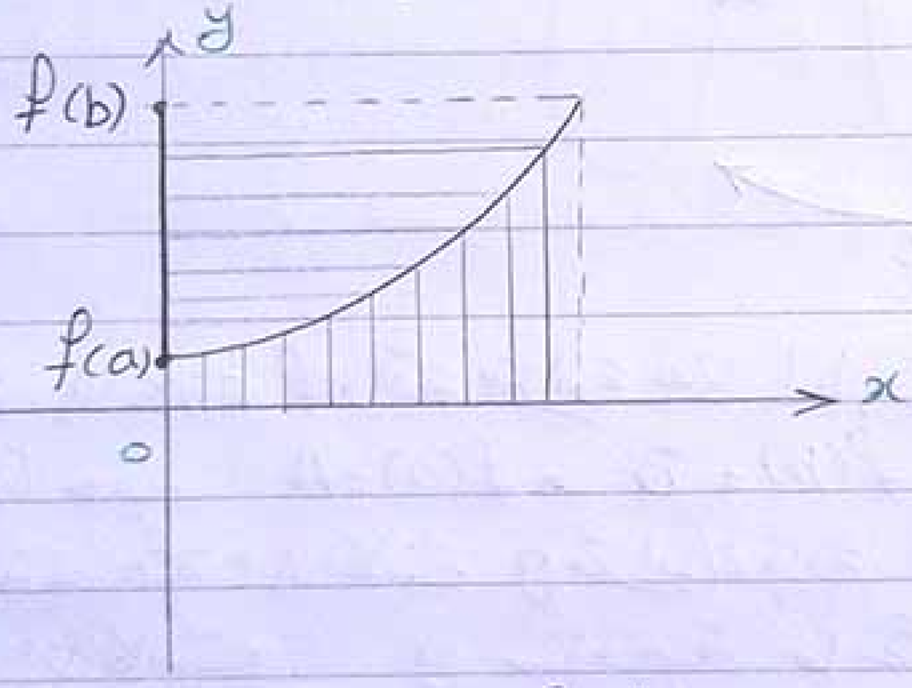
$\boxed{I}$ إذا كانت f مُعرّفة على المجال $I = [a,b]$ وكانت f مطّردة على I فإنّ جميع نقاط الانقطاع من النوع الأول إن وجدت [قابلة للإزالة أو لا].

$\boxed{II}$ مجموعة نقاط الانقطاع للدّوال المطّردة هي مجموعة منتهية أو معدودة وبحالة خاصّة إذا كانت f متزايدة فإنّ:

$$[f(a+0) - f(a)] + \sum_{k=1}^{\infty} [f(x_k+0) - f(x_k-0)] + [f(b) - f(b-0)] \leqslant f(b) - f(a)$$

حيث x_k نقاط اختيارية في المجال $[a,b]$

ملاحظة: إذا كان التّابع مستمر على مجال مغلق فهو مستمر بانتظام على هذا المجال ويكون التّابع معرّف على هذا المجال عند جميع نقاطه أي الصور موجودة ومحدودة.



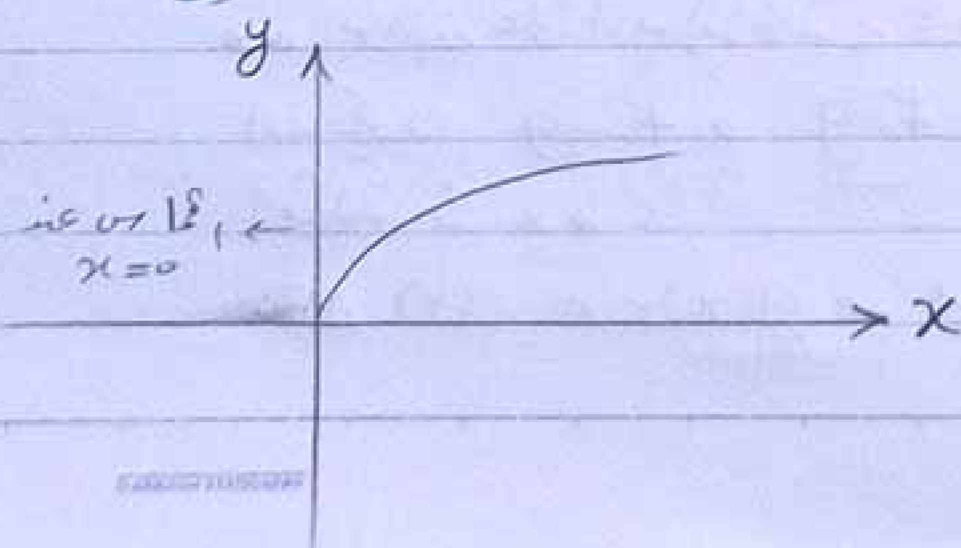
٨- الاشتقاق: نقول عن الدّالة f إنّها قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وُجد $A \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\lim_{x \geq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \leq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

اشتقاق من اليمين — اشتقاق من اليسار

ونرمز له بـ $f'(x_0)$

مثال: إنّ التّابع $y = \sqrt{x}$ مُعرّف على $[0, +\infty[$ واشتقاقه على $]0, +\infty[$



مبرهنة: إذا كانت الدالة f معرّفة ومستمرة على $I = [a,b]$ وكانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة $x_0 \in]a,b[$ عندئذ:

١ـ الشرط اللازم والكافي لتكون $f(x)$ متزايدة على I هو أن تكون $f'(x) \geq 0$

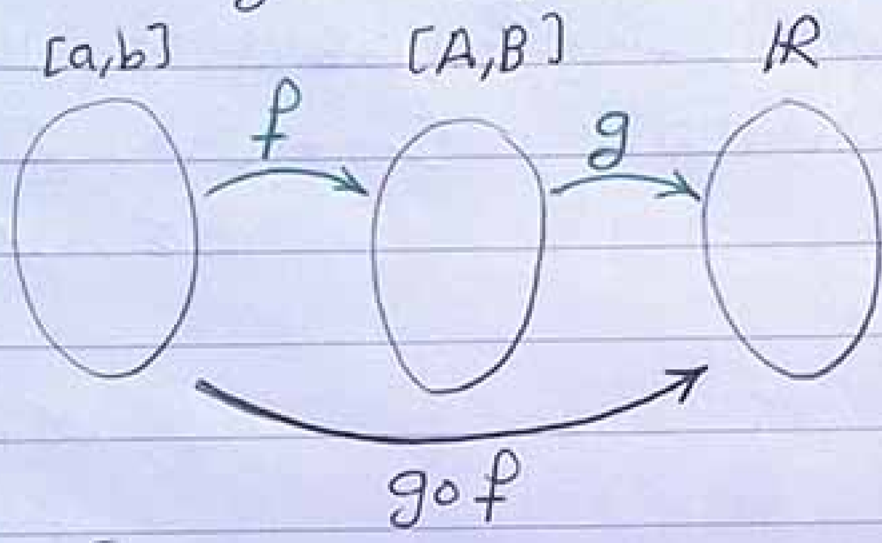
٢ـ الشرط اللازم والكافي لتكون $f(x)$ متناقصة على I هو أن تكون $f'(x) \leq 0$

٩ـ الدوال المركبة: لتكن لدينا الدالتان المعرّفتان بالشكل:

$f:[a,b] \longrightarrow [A,B]$ و $g:[A,B] \longrightarrow \mathbb{R}$

عندئذٍ الدالة المركبة $g \circ f$ تعرّف بالشكل:

$$g \circ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$



مبرهنة: إذا كانت f دالّة متزايدة على $[a,b]$ وكانت g دالّة مطردة على $[A,B]$ حيث $f(a)=A$ و $f(b)=B$ فإنّ $g \circ f$ مطردة.

وبحالة خاصّة: إذا كانت g متزايدة فإنّ $g \circ f$ متزايدة

وإذا كانت g متناقصة فإنّ $g \circ f$ متناقصة.

١٠ـ تمارين: * برهن أنّه إذا كانت كل من الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ متزايدة [متناقصة] على $[a,b]$ فإنّ $(f+g)$ متزايدة [متناقصة] على $[a,b]$

** برهن على أنّه إذا كانت f متزايدة و g متزايدة فإنّه ليس بالضروري أن يكون $f.g$ و $f-g$ متزايدتان.

أمثلة لـ ** :

مثال (1): $g(x)=x$ و $f(x)=x^2$ متزايدتان على $[0,1]$ و

لكن $x^2 - x$ ليست كذلك.

مثال (2): $g(x) = x$ و $f(x) = x - 1$ متزايدتان على $[0,1]$ ولكن $x.(x-1)$ ليست كذلك.

انتهت المحاضرة الأولى