المحاضرة السادسة ٢ / ٤ / ٢٠١٢

التكاملات المثلثية

حل التكاملات التالية:

$I_1 = \int \cos^7 x \sin^4 x \, dx$

$I_2 = \int \sin 3x \cos 2x \, dx$

$I_3 = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx$

$I_5 = \int \cos^4 x \sin^2 x \, dx$

$I_4 = \int \cos 3x / \sin^5 x \, dx$

$I_6 = \int \frac{x^{1/3}}{x^{2/3} - x^{1/2}} \, dx$

قد نضطر في بعض الأحيان للتعويض

$t = \tan \frac{x}{2}$ أو $t = \tan x$

$I_1 = \int \cos^7 x \cdot \sin^4 x \, dx$ الحل:

$I_1 = \int \cos^6 x \cdot \sin^4 x \cdot \cos x \, dx$

$= \int (\cos^2 x)^3 \cdot \sin^4 x \cos x \, dx$

$= \int (1 - \sin^2 x)^3 \cdot \sin^4 x \cdot \cos x \, dx$

حسب طريقة تغيير المتحول

$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx$

$I_1 = \int (1 - t^2)^3 \, t^4 \, dt$

$I_4 =$ لو قسمنا البسط على المقام

$= \frac{\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\cos x}{1 + \cos x}$

وبالتعويض العام

$I_4 = -\int \frac{-\sin x}{1 + \cos x} dx - \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$

$= -\ln|1 + \cos x|$

$- \int \frac{\frac{1 - t^2}{1 + t^2}}{\cancel{\frac{1 + t^2}{1 + t^2}} + \frac{1 - t^2}{\cancel{1 + t^2}}} \cdot \frac{2\,dt}{\cancel{1 + t^2}}$

توحيد المقامات نتج هذا المقدار

$= -\ln|1 + \cos x| - \int \frac{2(1 - t^2)}{2(1 + t^2)} dt$

$= -\ln|1 + \cos x| + \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt$

$I_4 = -\ln|1 + \cos x| + \int \frac{t^2 + 1 - 1 - 1}{1 + t^2} dt$

$= -\ln|1 + \cos x| + \int 1 \, dt - 2 \int \frac{1}{1 + t^2} dt$

$= -\ln|1 + \cos x| + t - 2 \arctan t + c$

التتمة بالمحاضرة

$$I_1 = \int (1-3t^2+3t^4-t^6)\, t^4\, dt$$

$$= \int t^4 - 3t^6 + 3t^8 - t^{10}\, dt$$

$$I_1 = \frac{1}{5}t^5 - \frac{3}{7}t^7 + \frac{1}{3}t^9 - \frac{1}{11}t^{11} + c$$

⇐ أصبح الشكل كالآتي

$$I_1 = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{3}{7}\sin^7 x + \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + c$$

$$I_2 = \int \frac{1}{2}\left[\sin(5x) + \sin(x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x\right] + c$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + c$$

$$I_3 = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx$$

$$I_3 = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \cos x\, dx$$

$$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\, dx$$

$$\Rightarrow I_3 = \int \frac{1-t^2}{t^4}\, dt$$

$$= \int \left[\frac{1}{t^4} - \frac{t^2}{t^4}\right] dt$$

$$= \int \left[\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right] dt$$

$$= \int t^{-4} - t^{-2}\, dt$$

$$I_3 = -\frac{1}{3}\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t} + c$$

وبتعويض قيمة t نحصل على الشكل المطلوب.

$$I_4 = \int \frac{\cos 3x}{\sin^5 x}\, dx$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x)$$

$$= \cos 2x . \cos x - \sin 2x . \sin x$$

$$= (\cos 2x - 2\sin^2 x)\cos x$$

$$= (1 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 x)\cos x$$

$$= (1 - 4\sin^2 x)\cos x$$

$$I_4 = \int \frac{1-4\sin^2 x}{\sin^5 x} \cos x\, dx$$

$$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\, dx$$

$$I_4 = \int \frac{1-4t^2}{t^5}\, dt$$

$$I_4 = \int \left[\frac{1}{t^5} - 4\,\frac{1}{t^3}\right] dt$$

$$= \int t^{-5} - 4t^{-3}\, dt$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{t^4} + 2\frac{1}{t^2} + c \quad \therefore t = \sin x$$

$$I_5 = \int \cos^4 x \sin^2 x\, dx$$

$$I_5 = \int (\cos^2 x)^2 \sin^2 x\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$I_6 = \int \left[t^3 + t^2 + t + 1 \right] dt$$

$$+ \int \frac{1}{t-1} dt$$

ذ.هـ.م

التمرين ، الفقرة ، السابعة

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int 1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x \, dx$$

$$I_5 = \frac{1}{8} \int \underbrace{1}_{x} + \underbrace{\cos 2x}_{\frac{\sin 2x}{2}} - \underbrace{\cos^2 2x}_{\frac{1+\cos 4x}{2}} - \boxed{\cos^3 2x \, dx}$$

$$\int \cos^3 2x \, dx = \int \cos^2 2x \cdot \cos 2x \, dx$$

$$= \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx$$

$$t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2 \cos 2x \, dx$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2} \int (1 - t^2) dt$$

$$I_6 \quad \frac{1}{3} , \frac{2}{3} , \frac{1}{2}$$

أ ضر

لأسس

والمضاعف المشترك الأصغر هو $\boxed{6}$

$$\longrightarrow S = 6$$

$$x = t^6 \Longrightarrow dx = 6t^5 \, dt$$

$$t = x^{\frac{1}{6}}$$

بالتعويض :

$$I_6 = \int \frac{t^4}{t^4 - t^3} 6t^5 \, dt$$

$$= 6 \int \frac{t^7}{t^4 \cdot t^3} dt = 6 \int \frac{t^4}{t-1} dt$$