الموضوع: معايير د.ت.م

1 المعيار الأول: إذا كانت f دالة معرّفة ومطّردة على $[a,b]$ فإن f د.ت.م على $[a,b]$ وإن:

$$\mathop{V}\limits_a^b f = |f(b) - f(a)|$$

نتيجة: إذا كانت f مطردة على المجالات $[a,c_1], [c_1,c_2], \ldots\ldots, [c_m,b]$ فإن:

$$\mathop{V}\limits_a^b f = \mathop{V}\limits_a^{c_1} f + \mathop{V}\limits_{c_1}^{c_2} f + \ldots\ldots + \mathop{V}\limits_{c_m}^{b} f$$

2 المعيار الثاني: إذا كانت f دالة معرّفة على $[a,b]$ وتحقق شرط ليبشتز فإن f د.ت.م على $[a,b]$ ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

3 المعيار الثالث: إذا كانت f دالة معرّفة على $[a,b]$ فإن الشرط اللازم والكافي لتكون f د.ت.م هو أن تكون فرق لدالتين متزايدتين.

4 المعيار الرابع: إذا كانت f دالة معرّفة على $[a,b]$ وكانت f دالة قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ بحيث: $\exists L>0 : |f'(x)| \leq L , \forall x \in]a,b[$

فإن f د.ت.م ويكون:

$$\mathop{V}\limits_a^b f = \int_a^b |f'(x)|\, dx$$

5 المعيار الخامس: إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ فإن:

$$\mathop{V}\limits_a^b f = \lim_{\Delta P \to 0} V(f,P) \quad , \Delta P = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$$

حيث P تجزئة أي $P \in \mathbb{P}[a,b]$ ، $P \subset P' \rightarrow \Delta P \geqslant \Delta P'$

الإثبات:

المعيار الأول:

f دالة معرّفة على $[a,b]$

- لنفرض أنّ f متزايدة على $[a,b]$ ولتكن:

$$P=\{a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n=b \; ; \; a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b\}$$

نعلم أنّ:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$V(f,P)=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\ldots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

تذكرة: الدّالة f متزايدة $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \; ; \; x_1<x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$V(f,P)=\cancel{f(x_1)}-f(a)+\cancel{f(x_2)}-\cancel{f(x_1)}+\ldots+f(b)-\cancel{f(x_{n-1})}$$

$$V(f,P)=f(b)-f(a)$$

وبأخذ الـ $\sup\limits_{P}$ للطرفين نجد:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = f(b)-f(a)$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = |f(b)-f(a)|$$

ملحوظات:

- استطعنا إزالة القيمة المطلقة من حدود $V(f,P)$ بسبب تزايد الدّالة f فالمقادير داخل القيم المطلقة هي مقادير موجبة.
- الـ sup للعدد الثّابت هو العدد الثّابت نفسه.
- إذا كان المقدار $b-a>0$ فإنّ العبارة التّالية محققة دوماً: $b-a=|b-a|$

- يتم البرهان في حالة f دالّة متناقصة بنفس الطّريقة السّابقة مع مراعاة التّبديل بين القيم داخل القيمة المطلقة عند إزالتها، أي:

لنفرض أنّ f دالّة متناقصة على المجال $[a,b]$ فإنّ:

$$V(f,P)=f(a)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})-f(b)$$
$$=f(a)-f(b)$$

وبأخذ الـ $\sup\limits_{P}$ للطرفين نجد:

$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = f(a) - f(b) \}$ مقدار موجب

لأنّ f دالّة متناقصة

$= |f(a) - f(b)| = |f(b) - f(a)|$

حسب خواص القيمة المطلقة.

المعيار الثاني:

شرط ليبشتز: إذا كانت f دالّة معرّفة على المجال $[a,b]$، نقول عن الدالّة f إنّها تحقق شرط ليبشتز إذا تحقق ما يلي:

$\forall u, v \in [a,b] : \exists L > 0 ; |f(u) - f(v)| \leq L |u - v|$

عودة لإثبات المعيار الثاني: نريد أن نثبت أنّ $\overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty$

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

حيث:

$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$

بما أنّ f دالّة تحقق شرط ليبشتز فإنّ:

$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq L_1 |x_k - x_{k-1}|$

وبالتالي: $: k = 1, 2, \dots, n , \exists L > 0 ; L = \max\{L_1, \dots, L_n\}$

$\rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\} : |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq L |x_k - x_{k-1}|$

$$\rightarrow V(f,P) \leq \sum_{k=1}^{n} L |x_k - x_{k-1}|$$

استطعنا إزالة القيمة المطلقة اعتماداً على تعريفنا للتجزئة.

$\leq L.\{x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}\}$

$\leq L.(b-a)$

وبأخذ الـ $\sup_{P}$ للطرفين نجد:

$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \leq \overbrace{L.(b-a)}^{\text{مقدار ثابت}} < \infty$

وبالتالي f دالّة ذات تغيّر محدود على $[a,b]$

← مفاهيم يجب حفظها في الذهن :

- $\overset{b}{\underset{a}{V}} f$ هو التغير الكلي للدالة f .

- إذا كان $\overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty$ ← f د.ت.م على المجال $[a,b]$.

- دالة التغير الكلي للدالة f هي $[g(x)]$ على المجال وتعرف كما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = 0 & ; \ x = a \\ g(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f & ; \ a < x \leq b \end{cases}$$

تمهيدية : إن دالة التغير الكلي للدالة f $[g(x)]$ هي دالة متزايدة.

الإثبات : نريد أن نثبت صحة ما يلي :

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] ; \ x_1 < x_2 \rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$$

لتكن التجزئة :

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2 = b ; \ a = x_0 < x_1 < x_2 = b\}$$

تذكرة : إذا كانت f معرفة على $[a,b]$ وكان $a < c < b$ فإن :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$$

بالاستفادة من التذكرة :

$$\underbrace{\overset{x_2}{\underset{a}{V}} f}_{\geq 0} = \underbrace{\overset{x_1}{\underset{a}{V}} f}_{\geq 0} + \underbrace{\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}} f}_{\geq 0}$$

$$\rightarrow \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}} f = \overset{x_2}{\underset{a}{V}} f - \overset{x_1}{\underset{a}{V}} f = g(x_2) - g(x_1) \geq 0$$

حسب التعريف

$$\rightarrow g(x_2) \geq g(x_1)$$

$$g(x_1) \leq g(x_2)$$

← g دالة متزايدة.

المعيار الثالث:

لزوم الشرط: f د.ت.م على $[a,b]$ $\leftarrow$ $f(x) = \psi(x) - \varphi(x)$ بحيث أن

كل من $\psi(x)$ و $\varphi(x)$ دوال متزايدة

البرهان: لنأخذ دالة التغير الكلي للدالة f:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; x = a \\ \overset{x}{\underset{a}{V}} f & ; a < x \leq b \end{cases}$$

• نعلم أنها دالة متزايدة.

لنضع:

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

$$\rightarrow f(x) = g(x) - h(x)$$

إذا أثبتنا أن $h(x)$ هي دالة متزايدة يتم المطلوب.

لنثبت الآن أن الدالة $h(x)$ تحقق الشرط:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]; x_1 < x_2 \rightarrow h(x_1) \leq h(x_2)$$

إذا أثبتنا أن $h(x_2) - h(x_1) \geq 0$ يتم المطلوب.

$$h(x_2) - h(x_1) = g(x_2) - f(x_2) - (g(x_1) - f(x_1))$$

$$= [g(x_2) - g(x_1)] - [f(x_2) - f(x_1)]$$

لنثبت الآن أن:

$$g(x_2) - g(x_1) \geq f(x_2) - f(x_1)$$

نعلم أن:

$$f(x_2) - f(x_1) \leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}} f$$

$$\rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}} f = g(x_2) - g(x_1)$$

$$\rightarrow [g(x_2) - g(x_1)] - [f(x_2) - f(x_1)] \geq 0$$

$$\rightarrow h(x_2) - h(x_1) \geq 0$$

$$\Rightarrow h(x_1) \leq h(x_2)$$

$\leftarrow$ h دالة متزايدة

كفاية الشرط:

إذا كان: $f = f_1 - f_2$ حيث f_1 دالة متزايدة على $[a,b]$ حيث f_2 دالة متزايدة على $[a,b]$ $\Leftarrow$ f د.ت.م على $[a,b]$

الإثبات:

f_1 دالة متزايدة على $[a,b]$ فهي د.ت.م على $[a,b]$ (حسب نظرية)

f_2 دالة متزايدة على $[a,b]$ فهي د.ت.م على $[a,b]$ (حسب نظرية)

أي كلاً من f_1 و f_2 دوال ذات تغير محدود على $[a,b]$ وبالتالي:

$f = f_1 - f_2$ د.ت.م على $[a,b]$ (حسب نظرية)

وهو المطلوب

أمثلة:

- مثال (1): بين أن الدالة $f(x) = x - x^2$ د.ت.م على $[0,1]$ و $[1,5]$ ثم أوجد $\overset{5}{\underset{0}{V}} f$

- مثال (2): أثبت أن الدالة $f(x) = x^2 - \frac{1}{1-x}$ د.ت.م على $[0,1]$ ثم أوجد $\overset{1}{\underset{0}{V}} f$

- مثال (3): بين أن الدالة $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ أنها د.ت.م على $[2,+\infty[$ ثم أوجد $\overset{\infty}{\underset{2}{V}} f$

- مثال (4): بين أن الدالة f المعرفة على $[a,b]$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

هي د.ت.م على $[0,+\infty[$

- مثال (5): لتكن الدالة f المعرّفة على المجال $[0,1]$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{\pi}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$

والمطلوب:

I) أثبت أنّ f قابلة للاشتقاق على $]0,1[$

II) f قابلة للاشتقاق من اليمين عند $x=0$.

III) f قابلة للاشتقاق من اليسار عند $x=1$.

IV) بين أنّ f د.ت.م على $[0,1]$.

- مثال (6): لتكن الدالة f المعرّفة على $[0,\frac{1}{2}]$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{\ln x} & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$

والمطلوب:

I) بين أنّ f مستمرّة على $[0,\frac{1}{2}]$

II) وضح أنّ f متزايدة على $[0,\frac{1}{2}]$

III) أوجد $\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f$.

IV) بين أنّ الدالة f لا تحقق شرط ليبشتز.

انتهت المحاضرة السادسة