ملحوظة:

$X = [30] \to |P(X)| = 2^{30}$

الانتقال $x_1 \le x_1 \to x_1 < x_2 + 1$

المحاضرة العاشرة

الخميس 10/4/2014

حل التمرين في المحاضرة السابقة:

لتوزيع كرة بيضاء و $k-1$ كرة سوداء على n صندوق بحيث أن كل صندوق يحوي كرة على الأكثر نختار k صندوق من بين n صندوق وذلك بـ $\binom{n}{k}$ طريقة ثم نوزع الكرة البيضاء و $k-1$ كرة سوداء في k صندوق المختارين وذلك يتم بـ k طريقة فيكون عدد الطرق الكلي $k\cdot\binom{n}{k}$.

لنحل المسألة بطريقة أخرى: نوزع الكرة البيضاء في n صندوق بـ n طريقة ثم لتوزيع $k-1$ كرة سوداء في $n-1$ المتبقين، نختار $k-1$ صندوق من بين الـ $n-1$ وذلك يتم بـ $\binom{n-1}{k-1}$ طريقة ثم نضع الـ $k-1$ كرة سوداء في $k-1$ صندوق بطريقة واحدة فيكون عدد الطرق الكلي هو $n\binom{n-1}{k-1}$

وبالتالي:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

تمرين: بفرض $1 \le k \le n$ والمطلوب: أوجد عدد التوابع التزايدية تماماً من $[k]$ إلى $[n]$ أي أوجد

$$\text{card}\, X = \text{card}\{f: [k] \to [n] : 1 \le i < j \le k \to f(i) < f(j)\}$$

الحل: ليكن التابع:

$$g: X \to Y = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \le x_1 < x_2 < \dots < x_k \le n\}$$

$$f \mapsto g(f) = (\underset{1\le}{f(1)}, \underset{<}{f(2)}, \underset{<}{\dots}, \underset{<}{f(k)}\underset{\le n}{)}$$

نعلم من تمرين سابق أنه:

$$|Y| = \binom{n}{k}$$

إن التابع g تقابل (تحقق من ذلك)

وبالتالي

$$|X| = \binom{n}{k}$$

من عشي: التباين: لنفرض أنه $g(f) = g(f') \Leftarrow$

$(f(1), \dots, f(k)) = (f'(1), \dots, f'(k))$

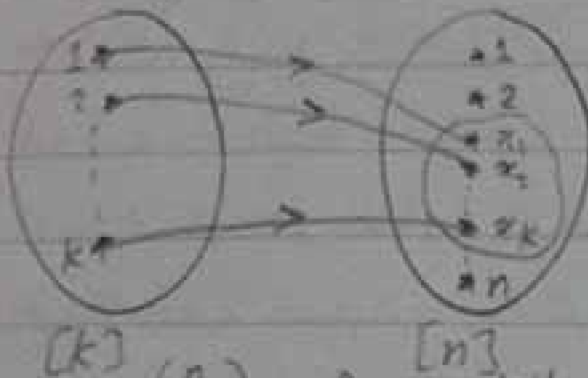
$\to f(1) = f'(1), \dots, f(k) = f'(k) \to$ g متباين

الغمر: لنأخذ عنصر $(x_1, \dots, x_k) \in Y$ حيث أنه:

$1 \le x_1 < x_2 < \dots < x_k \le n$ ولنعرف التابع:

$$f: [k] \to [n]$$

$$i \mapsto f(i)$$



طريقة ثانية:

كل مجموعة تعطينا تابع وكل تابع يقابل مجموعة جزئية وبالتالي عدد التوابع المتزايدة يساوي عدد المجموعات الجزئية من $[n]$ والتي تحوي k عنصر وبالتالي يكون عدد التوابع المتزايدة هو $\binom{n}{k}$

ملاحظة: التابع $g: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^3$ هو تقابل

$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - 10, x_2 - 10, x_3 - 10)$

$$\text{card}\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 : 11 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 17\}$$

نتيجة لوجود المساواة أو عدم وجودها

$$= \binom{7}{3}$$

تمرين: من أجل كل $n, m \in \mathbb{N}^*$ أوجد عدد عناصر المجموعة التالية:

$$S = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}^m : 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m \leq n\}$$

الحل: فكرة الحل تبدأ بملاحظة أن التابع:

$$g(x_1, \dots, x_m) = (x_1, x_2 + 1, \ + 2, \dots, x_m + m - 1)$$

أن التابع g الذي منطلقه:

$$S = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}^3 : 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m \leq n\}$$

ومستقره المجموعة:

$$T = \{(y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{N}^m : 1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_m \leq n + m - 1\}$$

هو تقابل (تحقق من ذلك) وبالتالي:

$$|S| = |T| = \binom{m+n-1}{m}$$

$$g(x_1, \dots, x_m) = g(x_1', \dots, x_m')$$

← g متباين

الحل: إن التابع $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x + a$

تقابله العكسي $y \mapsto y - a$ هو تقابل.

ملاحظة ل * :

$$(-1)^1(-1)^{r+1} = (-1)^{r+2} = (-1)^r \underbrace{(-1)^2}_{=1} = (-1)^r$$

تمرين: أوجد عدد التوابع المتزايدة من $[m]$ إلى $[n]$ أي:

$$\text{card}\{f : [m] \longrightarrow [n] \ ; \ 1 \le i < j \le m \rightarrow 1 \le f(i) \le f(j) \le n\}$$

تمرين: (وظيفة ستحل لاحقاً):

أثبت أنه من أجل كل $0 \le k \le n$ فإن:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$

2) $\displaystyle\sum_{K=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

مسألة الاحتواء والاستثناء:

لتكن A, B أي مجموعتين منتهيتين عندئذٍ فإن:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ومن أجل ثلاث مجموعات منتهية نجد:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

التعميم: لتكن $A_1, \ldots\ldots, A_n$ مجموعات منتهية وجزئية من المجموعة المنتهية X عندئذٍ فإن:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < K \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots\ldots + (-1)^{r+2} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}|$$

$$+ \ldots\ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

عامةً:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{r=2}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n} |A_{i_1} \cap \ldots\ldots \cap A_{i_r}|$$

$$\rightarrow \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right| = |X| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \longrightarrow$$

النقطة الثابتة لتابع دستور النقطة بمستقر

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| = |X| + \sum (-1)^r \sum_{1\le i_1<\dots<i_r\le n} |A_{i_1}\cap \dots \cap A_{i_r}|$$

وهي قاعدة الاحتواء والاستثناء.

تمرين (سيحل لاحقاً) نفرض $1 \le n$

أوجد عدد التباديل في S_n والتي لاتملك نقاط ثابتة أي:

أي: $S_n \ni f,\ f(i) \neq i,\ \forall i \in [n]$

توجيه: لتكن A_i هي مجموعة التقابلات على $[n]$ والتي تثبت العنصر

عندئذٍ يكون المطلوب هو: $|A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c|$