٢٠١٤/٢/٢٤ المحاضرة الرابعة

القيم والمتجهات الذاتية:

تعريف: ليكن V فضاء متجهي معرف على حقل F وبعده n

و $L: V \longrightarrow V$ مؤثراً خطياً و $0 \neq v \in V$

① نقول إن v متجه ذاتي للمؤثر L إذا وفقط إذا تحقق:

$\exists \lambda \in F : L(v) = \lambda . v$

② نسمي λ القيمة الذاتية للمؤثر L.

⊙ نعرف الفضاء الذاتي المقابل لـ λ بالشكل.

$$V_\lambda = \{ v \in V : L(v) = \lambda v \}$$

وهو فضاء شعاعي جزئي في V

⊙ نقول عن مجموعة الأشعة الذاتية $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

انها قاعدة ذاتية اذا كانت B قاعدة للفضاء V.

⊙ نسمي مجموعة كل القيم الذاتية بـ طيف المؤثر L.

مثال: ليكن $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad L(x,y) = (x+y, x-y)$

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المقابلة لها. عين القاعدة الذاتية للفضاء V إن وجدت

الحل:

$$\forall v \neq 0 : v = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : L(v) = \lambda v$$

$$(x+y, x-y) = (\lambda x, \lambda y)$$

$$\left.\begin{aligned}(1-\lambda)x + y &= 0\\ x - (1+\lambda) &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

جملة معادلات خطية متجانسة لها حل غير صفري إذا وفقط اذا كانت محدد الأمثال لا يساوي الصفر

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1 + \lambda^2 - 1) = \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}}$$

من أجل $\lambda_1 = \sqrt{2} \Leftarrow$

$$(1-\sqrt{2})x + y = 0$$

$$x - (1+\sqrt{2})y = 0 \Rightarrow \boxed{x = (1+\sqrt{2})y}$$

$$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})y + y = 0 \Rightarrow (1-2)y + y = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0}$$

ومنه $\{x = (1+\sqrt{2})y\}$

أي يوجد عدد غير منتهي من الأشعة الذاتية المقابلة لـ $\lambda_1 = \sqrt{2}$ ونختار منها:

$$V = ((1+\sqrt{2})y, y)$$

$$v_1 = (1+\sqrt{2}, 1)$$

من أجل $\lambda_2 = -\sqrt{2} \Leftarrow (1+\sqrt{2})x + y = 0 \Leftarrow$

$$x - (1-\sqrt{2})y = 0 \Leftarrow \boxed{x = (1-\sqrt{2})y}$$

أي يوجد عدد غير منتهي من المتجهات الذاتية للقيمة الذاتية $\lambda_2 = -\sqrt{2}$

ونختار منها $v = ((1-\sqrt{2})y, y)$ ونختار منها $v_2 = (1-\sqrt{2}, 1)$

وبالتالي تكون القاعدة الذاتية: $B = \{v_1, v_2\}$

لأنها مستقلة خطياً و $2 = card(B) = \dim(\mathbb{R}^2)$

ملاحظة: يجب ذكر سبب الاستقلال الخطي "البرهان".

مبرهنة: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F وبعده n و $L: V \to V$ مؤثراً خطياً اذا كانت $\lambda \in F$ قيمة ذاتية للمؤثر L فإن

① λ تقابل أكثر من متجه ذاتي.

② كل متجه ذاتي يقابل قيمة ذاتية وحيدة.

الإثبات: ① λ قيمة ذاتية تقابل المتجه الذاتي v:

$$0 \neq v \in V: L(v) = \lambda v$$

$$\forall 0 \neq a \in F: av \in V$$

$$L(av) = aL(v) = a(\lambda v) = \lambda(av)$$

$$\forall 0 \neq a \in F: av$$

ومنه λ قيمة ذاتية تقابل المتجه

أي λ تقابل أكثر من متجه ذاتي.

② ليكن v متجه ذاتي يقابل λ_1, λ_2 أي أن

$$\left.\begin{array}{l} L(v) = \lambda_1 v \quad \text{--- ①} \\ L(v) = \lambda_2 v \quad \text{--- ②} \end{array}\right\} \text{بالطرح}$$

$$0 = L(v) - L(v) = (\lambda_1 - \lambda_2)v \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

أي كل متجه ذاتي يقابل قيمة ذاتية وحيدة.

انتهت المحاضرة