ملحوظة: التابع القابل للاشتقاق لا يحوي نقاط شاذة، لكل نقطة مماس

الأربعاء: 19/3/2014 — المحاضرة الخامسة

## صيغ كوشي التكاملية:

مبرهنة: بفرض $f(z)$ تابع معرف على المنطقة $D$ وبفرض $\gamma$ منحني بسيط مغلق واقع في $D$ وبفرض $a \in D$ حيث $a$ واقعة ضمن المنحني $\gamma$ عندئذٍ:

I) $$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i f(a)$$

II) $$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$$

حيث نسمّي $a$ في هذه الحالة نقطة شاذة من المرتبة $n$ بالنسبة للتابع $\frac{f(z)}{(z-a)^n}$

الإثبات:

I) نلاحظ أنّ التابع $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلي على $D$ باستثناء النقطة $a$، نفرض $\gamma_1$ منحني $\gamma_1$ منحني دائرة مركزها $a$ ونصف قطرها $r$ بحيث $\gamma_1$ واقع تماماً ضمن $\gamma$ أي:

منحني دائرة مركزها $a$ ونصف قطرها $r$

$$\gamma_1(t) = re^{it} + a \;;\; t \in [0, 2\pi]$$

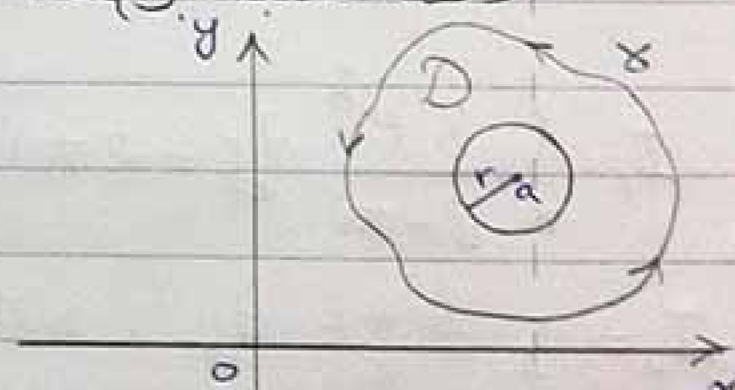
ومنه حسب مبرهنة:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(r.e^{it}+a)}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i f(re^{it}+a)\, dt$$

وبجعل $r \longrightarrow 0$




$D$ منطقة (مفتوحة مترابطة)

وبالتالي جوارًا مفتوحة إذ يوجد لكل نقطة كرة مفتوحة واقعة تمامًا في $D$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{i f(a)}_{\text{ثوابت}}\, dt = 2\pi i f(a)$$

II) من I لدينا:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

نشتق هذه العلاقة بالنسبة لـ $a$ فنجد:

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz$$

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^3}\, dz$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

تمرين: باستخدام صيغ كوشي التكاملية احسب التكاملات العقدية التالية:

$$I_1 = \int_{\gamma} \frac{z^2 e^z}{z-\pi i}\, dz \; ; \; \gamma(t) = e^{it} + \pi i \; ; \; t \in [0, 2\pi]$$

منحني دائرة مركزها $\pi i$ ونصف قطرها (1)

ملاحظة: يمكن الحل حسب القانون المباشر ولكن الحل أصعب

الحل: نضع: $f(z) = z^2 e^z$ فنلاحظ

أنّ: $f(z)$ تابع تحليلي على $\mathbb{C}$ و

$a = \pi i$ نقطة شاذة من المرتبة الأولى

للتابع $\frac{f(z)}{z-\pi i}$ ومنه حسب صيغ

كوشي التكاملية يكون:

$$I_1 = \int_{\gamma} \frac{z^2 e^z}{z-\pi i}\, dz = 2\pi i\, f(\pi i) = 2\pi i\, (\pi i)^2 e^{\pi i} = 2\pi^3 i$$

ملاحظة: في الامتحانات يجب وضع القانون

$$I_2 = \int_{\gamma} \frac{z^2+1}{z}\, dz \; ; \; \gamma(t) = e^{it} \; ; \; t \in [0, 2\pi]$$

الحل: نضع $f(z) = z^2 + 1$ وهو تابع تحليلي على $\mathbb{C}$

ونلاحظ أنّ $a = 0$ هي نقطة شاذة من المرتبة

الأولى للتابع $\frac{f(z)}{z}$ ومنه حسب صيغ

كوشي التكاملية يكون:

$$I_2 = \int_{\gamma} \frac{z^2+1}{z}\, dz = 2\pi i\, f(0)$$

طريقة ثانية:

$$I_2 = \underbrace{\int_{\gamma} z\, dz}_{=0} + \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 0 + 2\pi i = 2\pi i$$

حسب كوشي

$$I_3 = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2 - 2z}\, dz \; ; \; \gamma(t) = e^{it} \; ; \; t \in [0, 2\pi]$$

الحل: نضع $f(z) = \dfrac{\cos z}{z-2}$ وهو تحليلي داخل $\gamma$

ومنه:

$$I_3 = \int_\gamma \frac{\frac{\cos z}{z-2}}{z}\, dz$$

$$= 2\pi i\, f(0) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

$$I_4 = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2 - 2z}\, dz \; ; \; \gamma(t) = 3e^{it} \; ; \; t \in [0, 2\pi]$$

الحل: نلاحظ أنّ $\gamma$ يحوي نقطتين شاذتين للتابع $\dfrac{\cos z}{z^2-2z}$ وهما $2$ و $0$ لذلك:

$$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2}$$

$$= \frac{(A+B)z - 2A}{z(z-2)}$$

$$\rightarrow -2A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{-1}{2}}$$

$$A + B = 0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}}$$

ومنه:

$$\frac{\cos z}{z(z-2)} = -\frac{1}{2}\frac{\cos z}{z} + \frac{1}{2}\frac{\cos z}{z-2}$$

وبالتالي:

$$I_4 = \frac{-1}{2}\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\, dz + \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{\cos z}{z-2}\, d$$

$$= -\frac{1}{2}\, 2\pi i \cos 0 + \frac{1}{2}\, 2\pi i \cos 2$$

ملاحظة: الجواب هو عدد

$$= -\pi i + \pi i \cos 2 = \boxed{\pi i(\cos 2 - 1)}$$ (الحساب) عقدي تخيلي بحت يقع على المحور التخيلي

ملاحظات: 2 هي زاوية غير شهيرة تقع في الربع الثاني كما أنّ $\cos 2$ هو عدد سالب

27/12/11

$\ln(1)=0$
$\ln(e)=1$

$$I_5=\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^2}\,d \;;\; \gamma(t)=e^{it}+1 \;;\; t\in[0,2\pi]$$

الحل: نلاحظ أنّ $z=1$ هي نقطة شاذة من الرتبة الثانية.

نضع $f(z)=e^z$ عندئذٍ:

$$I_5=\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^2}\,dz$$

$$=\frac{2\pi i}{1!}f'(1)=2\pi i e$$

$$I_6=\int_\gamma \frac{2z^4+1}{(z-1-i)^4}\,dz \;;\; \gamma(t)=2e^{it}+2+2i \;;\; t\in[0,2\pi]$$

الحل: نضع $f(z)=2z^4+1$ وهو تابع تحليلي على $\mathbb{C}$ ، نلاحظ أنّ $a=1+i$ هي نقطة شاذة من الرتبة الرابعة للتابع $\frac{f(z)}{(z-1-i)^4}$ وتقع داخل المنحني $\gamma$ لأنّ $\gamma$ منحني دائرة و $1+i$ يبعد عن مركزها: $\sqrt{2}<2$ (نصف القطر)

ومنه حسب صيغة كوشي التكاملية:

$$I_6=\int_\gamma \frac{2z^4+1}{(z-1-i)^4}\,dz=\frac{2\pi i}{3!}f'''(1+i) \;;\; f'''(z)=48z$$

$$\Rightarrow I_6=\frac{2\pi i}{6}\big(48(1+i)\big)=16\pi i(1+i)=-16\pi+16\pi i$$

تمرين: أوجد القانون العام للتكامل:

$$I_n=\int_\gamma \frac{e^z}{z^n}\,dz \;;\; \gamma(t)=e^{it} \;;\; t\in[0,2\pi] \;;\; n\in\mathbb{Z}$$

الحل: نميز حالتين:

$\boxed{1}$ $n\le 0$ عندئذٍ: $z^{-n}e^z$ تحليلي داخل $\gamma$ ويكون $I_n=0$ حسب مبرهنة كوشي.

2) $n > 0$ عندئذٍ حسب صيغة كوشي التكاملية يكون :

$$I_n = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) \; ; \; f(z) = e^{z}$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!}$$

سؤال : ماذا لو كانت النقطة الشاذة $a$ واقعة على المنحني $\gamma$ ؟
سنتناول التمرين التالي للإجابة عن هذا السؤال .

تمرين : احسب التكامل :

$$I = \int_{\gamma} \frac{z}{z-1} dz \; ; \; \gamma(t) = e^{it} \; , \; t \in [0, 2\pi]$$

الحل : نأخذ دائرة مركزها $0$ ونصف قطرها $2$ ولتكن $\gamma_1$ فيكون :

$$I = \int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} = 2\pi i \; (1)$$
$$= 2\pi i$$

ومنه نلاحظ أنه إذا كانت النقطة الشاذة واقعة على المنحني $\gamma$ نعتبرها داخل $\gamma$ ومن ثم نطبق صيغ كوشي التكاملية .

وظيفة : I) باستخدام صيغ كوشي التكاملية احسب التكاملات التالية :

$$I_1 = \int_{\gamma} \frac{e^{z}}{z^3 + z} dz \; ; \; \gamma(t) = 2e^{it} \; ; \; t \in [0, 2\pi]$$

$$I_2 = \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4 - 1} \; ; \; \gamma(t) = e^{it} + 1 \; ; \; t \in [0, 2\pi]$$

$$I_3 = \int_{\gamma} \frac{2z + 1}{(z-1)(z-2)^2} dz \; ; \; \gamma(t) = 2e^{it} + 2 + i \; ; \; t \in [0, 2\pi]$$

تمرين: أوجد القانون العام للتكامل:

$$I_n = \int_{\gamma} \frac{z^2+1}{(z+i)^n}, \quad \gamma(t) = 2e^{it}; \ t \in [0, 2\pi]; \ n \in \mathbb{Z}$$