Subject: 11 / 5 / 2014

« المحاضرة الرابعة عشرة »

# 6★ الحلقات النيوثرية والآرتينية :

## 6-1- الحلقات النيوثرية : Noetherian Ring -

### 6-1-1- تعريف :

- لتكن $R$ حلقة تبديلية ، عندئذٍ :

★)- نقول أن $R$ تحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة ، ونرمز لها (a.c.c) (ascending chain condition) إذا تحقق :

- من أجل كل سلسلة متزايدة من المثاليات $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots\dots$ في $R$ فإنه يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث : $I_n = I_i \ , \forall i \geq n$

★★)- $R$ نيوثرية إذا وفقط إذا كانت $R$ تحقق الشرط (a.c.c) .

(أمثلة) :

1- كل حقل هو حلقة نيوثرية .

2- كل حلقة منتهية هي حلقة نيوثرية .

3- إذا كانت $R$ هي PID ، فإن $R$ هي نيوثرية .

### 6-1-2- مبرهنة :

- لتكن $R$ حلقة تبديلية ، عندئذٍ الشروط التالية متكافئة :

1- $R$ نيوثرية .

2- كل مثالي في $R$ يكون منتهي التوليد .

3- كل مجموعة غير خالية من المثاليات في $R$ تحوي عنصر أعظم .

« الإثبات » :

$\boxed{1} \Leftarrow \boxed{2}$ ..

- ليكن : $I \triangleleft R$ ، عندئذٍ نميز حالتين :

$\boxed{1}$ - if $I = \langle 0 \rangle \rightarrow$ يتم المطلوب

$\boxed{2}$ - $\langle 0 \rangle \subsetneq I \Rightarrow \exists a_1 \in I : \langle 0 \rangle \subseteq \langle a_1 \rangle \subseteq I$

- إذا كان : $\langle a_1 \rangle = I$ ← يتم المطلوب .

- أما إذا كان : $\langle a_1 \rangle \subsetneq I \Leftarrow$

$\exists a_2 \in I : \langle 0 \rangle \subseteq \langle a_1 \rangle \subseteq \langle a_1, a_2 \rangle \subseteq I$

وبتكرار ذات الخطوات سوف نحصل على السلسلة المتزايدة :

$\langle 0 \rangle \subseteq \langle a_1 \rangle \subseteq \langle a_1, a_2 \rangle \subseteq \ldots\ldots \subseteq I$

وبما أن $R$ حلقة نيوثرية ، فإن :

$\exists n \in \mathbb{N} : I = \langle a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \rangle$

← $I$ منتهي التوليد .

#

$\boxed{2} \Leftarrow \boxed{3}$ ..

- لتكن $\mathcal{S}$ مجموعة من المثاليات في $R$ وَ غير خالية ..

لنفرض جدلاً أن $\mathcal{S}$ لا تملك عنصر أعظم ، ومنه :

$\exists A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n \in \mathcal{S} : A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \ldots\ldots$

ولدينا ، $A_i \triangleleft R : \forall i \in \mathbb{N}$

ولنعرف المثالي $A$ بالشكل : $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \triangleleft R$

( $A \triangleleft R$ بسبب علاقة الاحتواء )

وبما أن كل مثالي في $R$ منتهي التوليد ( حسب الفرض ) ، فيوجد :

$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_t \in R : A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_t \rangle$

وبسبب علاقة الاحتواء فإنه :

$\exists j \in \mathbb{N} : a_1, a_2, \ldots, a_t \in A_j \Rightarrow$

$\underline{A} = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_t \rangle \subseteq A_j$

$\Rightarrow \exists j \in \mathbb{N} : A_j = \langle a_1, a_2, \dots, a_t \rangle$

ومنه: $A_j$ عنصر أعظم في $\Sigma$ ..

ومنه: الفرض الجدلي خاطئ ⇐ $\Sigma$ تملك عنصراً أعظم

#

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$

- لتكن السلسلة المتزايدة من المثاليات في $R$ :

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$

عندئذٍ:

$\Sigma = \{ I_i \trianglelefteq R : i \in \mathbb{N} \}$

مجموعة غير خالية من المثاليات في $R$ ، فيكون (حسب الفرض) يوجد عنصر أعظم في $\Sigma$ ، وليكن $I$ .. أي أن:

$\exists i \in \mathbb{N} : I = I_i = I_{i+1} = \dots$

وبالتالي السلسلة انقطعت ..

⇐ الحلقة نيوترية . #

* ملاحظة :

PID ⇐ كل مثالي هو رئيسي أي مولد بعنصر وحيد أي منتهي التوليد ⇐ نيوترية .

6-1-3- مبرهنة :

- إذا كانت $R$ حلقة تبديلية واحدية ، فإن الشروط التالية متكافئة :

$\boxed{1}$- $R$ نيوترية .

$\boxed{2}$- كل مثالي أولي في $R$ منتهي التوليد .

((الاثبات))

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$

(حسب المبرهنة السابقة) كل مثالي في حلقة نيوترية يكون منتهي التوليد

وبالتالي يكون: كل مثالي أولي في $R$ منتهي التوليد.

#

[2] ⇐ [1]:

- نفرض جدلاً أن $R$ ليست نيوثرية، فيكون (حسب المبرهنة السابقة) يوجد مثالي واحد على الأقل ليس منتهي التوليد..
وبالتالي تكون $\mathcal{S}$ مجموعة كل المثاليات الغير منتهية التوليد من $R$ غير خالية.

- لنبرهن عن أن $\emptyset = \mathcal{S}$

- وبالتالي: $(\mathcal{S}, \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء.

- لتكن: $I_1 \subsetneq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ سلسلة متزايدة من عناصر $\mathcal{S}$..
ولنثبت أنها تملك حداً أعلى..

- ليكن: $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \trianglelefteq R$ ، ( $I \trianglelefteq R$ بسبب علاقة الاحتواء ).
كما أنه حد أعلى لهذه السلسلة لأنه اجتماع عناصر هذه السلسلة.
كما أنه غير منتهي التوليد وذلك لأن:

* إذا كان $I$ منتهي التوليد، أي إذا كان $I = \langle a_1, a_2, \dots, a_t \rangle$
فإنه:

$$\exists i \in \mathbb{N} : a_1, a_2, \dots, a_t \in I_i$$

وذلك (بسبب علاقة الاحتواء)..

$$\Rightarrow \langle a_1, a_2, \dots, a_t \rangle \subseteq I_i$$

ولكن: $I_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

$$\Rightarrow I_i = \langle a_1, a_2, \dots, a_t \rangle$$

وهذا غير ممكن لأن (( $I_i \in \mathcal{S}$ )) ..

أي أن: $I$ حد أعلى لهذه السلسلة في $\mathcal{S}$..

(وحسب تمهيدية زورن) يوجد عنصر أعظمي وليكن $J \in \mathcal{S}$..

فإن $J$ مثالي ⇐ $J$ مثالي أعظمي.

وبما أن $R$ حلقة تبديلية واحدية ، وفي الحلقة التبديلية الواحدية " لكل مثالي أعظمي هو مثالي أولي " ..

أي : $J \in Spec(R)$ $\Leftarrow$ $J$ منتهي التوليد (حسب الفرض)

معناها تحقق كون $J \in \sum$ ، أي أن الفرض الجدلي خاطئ و $\sum = \emptyset$

$\Leftarrow$ $R$ حلقة نيوترية .

#

6-1-9- مبرهنة :

- لتكن $R$ حلقة تبديلية ، إذا كانت $R$ نيوترية و $I \trianglelefteq R$ ، فإن :
$R/I$ حلقة نيوترية .

" الاثبات "

- لتكن : $\bar{I}_1 \subseteq \bar{I}_2 \subseteq \bar{I}_3 \subseteq \ldots\ldots$

سلسلة متزايدة من المثاليات في $R/I$ .. حيث أن :
$\forall i \in \mathbb{N}$ ؛ $\bar{I}_i = I_i/I$

- ليكن :

$\pi : R \to R/I$ " التشاكل الطبيعي "
$: r \mapsto r + I$

وبالتالي : $\forall i \in \mathbb{N}$ ؛ $\pi^{-1}(\bar{I}_i) = I_i$

ومنه يكون :

$\pi^{-1}(\bar{I}_1) \subseteq \pi^{-1}(\bar{I}_2) \subseteq \ldots$

$\Rightarrow \quad I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots\ldots$

سلسلة متزايدة من المثاليات في $R$ ، ولكن $R$ نيوترية ..
عندئذٍ فإن :

$\exists i \in \mathbb{N} : I_i = I_j \ , \ \forall j \geq i$

$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} : \bar{I}_i = \bar{I}_j \ ; \ \forall j \geq i \Rightarrow$ $R/I$ نيوترية

#

Subject: / /

مثال :

- الصورة التشاكلية لحلقة نيوثرية هي حلقة نيوثرية ، أي أن :

إذا كان : $\varphi : R \to$ تشاكل حلقي و $(R$ نيوثرية$)$
$\Leftarrow \varphi(R)$ نيوثرية .

«الإثبات» ..

$R/\ker(\varphi) \cong \varphi(R)$ : لدينا (حسب المبرهنة الأساسية في التماثل).

و (حسب المبرهنة السابقة) : $\ker(\varphi) \trianglelefteq R$ و $R$ نيوثرية .

$R/\ker(\varphi)$ نيوثرية ، لكن : $R/\ker(\varphi) \cong \varphi(R)$ $\Leftarrow$ $\varphi(R)$ نيوثرية

#

*- تمرين : - مراجعة -

- لتكن $R$ حلقة تحقق أن : $(\forall a \in R ; a^2 = a)$ ..

*) - أثبت أن : $R$ حلقة تبديلية .

**) - إذا كانت $R$ حلقة واحدية ، فإنه إذا تحقق أن : «كل مثالي أعظمي في $R$ هو مثالي رئيسي» .. فإن : $R$ نيوثرية .

- تمرين : - مراجعة -

- لتكن الحلقة :

$$R = \{ f \in \mathbb{C}[x] : \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(0) = 0 \ : i = (1, 2, \ldots, k) \}$$

هل $R$ نيوثرية ؟

#