المحاضرة الثامنة

3/4/2014 الخميس

مجموعة الكلمات على مجموعة:

تعريف:

لتكن $A\neq\phi$ سندعو كلمة من الطول n ($n\in\mathbb{N}^*$) على المجموعة A أي عنصر من الشكل: $x_1x_2\dots x_n$ و $x_i\in A$ من أجل كل $i\in[n]$

سنرمز $W_n(A)$ لمجموعة كل الكلمات على A من الطول n، سندعو A مجموعة كل أحرف الأبجدية وسندعو x_i الحرف رقم i في الكلمة.

سنرمز $W(A)$ لمجموعة كل الكلمات على الأبجدية A ومن أي طول كان أي أنّ:

$$W(A)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} W_n(A)$$

مثال: لتكن $A=\{$أ، ب، ت، ......، ي$\}$ فتكون ب ج، ج ب، هه هه $\in W_2(A)$

$|A|=28 \Rightarrow |W_2(A)|=(28)^2$

تمرين: لتكن $n=r+s+t$ أعداداً طبيعية ولتكن $A=\{a,b,c\}$ لنرمز $W_n^{r,s,t}(A)$ لمجموعة كل الكلمات من مجموعة $W_n(A)$ بحيث أنّ الحرف a مكرر r مرة في الكلمة والحرف b مكرر s مرة في الكلمة والحرف c مكرر t مرة والمطلوب: أوجد عدد عناصر هذه المجموعة؟

الحل: توضيح:

$\underbrace{a\dots a}_{r\ \text{مرة}},\ \underbrace{b\dots b}_{s\ \text{مرة}},\ \underbrace{c\dots c}_{t\ \text{مرة}}$

$x_1\ x_2\ \dots\dots\ x_n$

$\underset{1}{\sqcup}\ \underset{2}{\sqcup}\ \dots\dots\ \underset{3}{\sqcup}$

- وجدنا في تمرين سابق أنّه إذا أردنا توزيع r كرة بيضاء و s كرة سوداء و t كرة حمراء في n صندوق بحيث أنّ كل صندوق يحوي كرة واحدة فإنّ عدد طرق التوزيع هي:

$$\frac{(r+s+t)!}{r!\cdot s!\cdot t!}$$

إنّ عدد عناصر مجموعة $W_n^{r,s,t}(A)$ يساوي عدد طرق توزيع الأحرف التالية:

$\underbrace{c,c,\dots\dots,c}_{\text{مكرر } t \text{ مرة}},\ \underbrace{b,b,\dots\dots,b}_{\text{مكرر } s \text{ مرة}},\ \underbrace{a,a,\dots\dots,a}_{\text{مكرر } r \text{ مرة}}$

في n صندوق هي:

$$\sqcup\ \sqcup\ \cdots\cdots\ \sqcup$$
$$x_1\ x_2\ \cdots\cdots\ x_n \in W_n(A)$$

وبالتالي:

$$|W_n^{r,s,t}(A)| = \frac{(r+s+t)!}{r!\cdot s!\cdot t!}$$

القاعدة التالية هي تعميم للتمرين السابق:

قاعدة:

لتكن $A=\{a_1,\dots\dots,a_m\}$ ولتكن $k_1,k_2,\dots\dots,k_m$ أعداد طبيعية مجموعها n سنرمز:

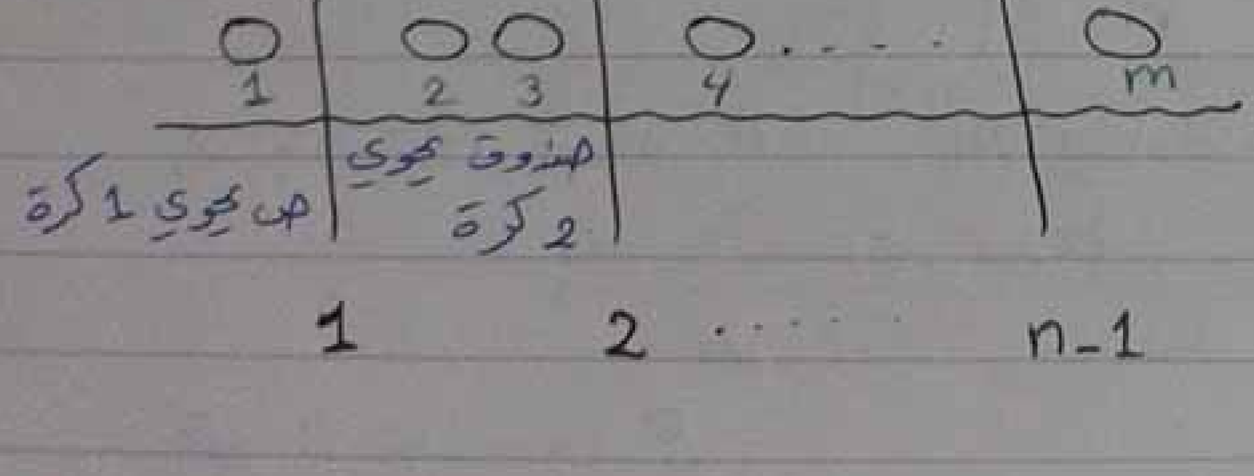
$$W_n^{k_1,k_2,\dots,k_m}(A)$$

مجموعة كل الكلمات من الطول n وأحرفها من الأبجدية A بحيث أن a_i مكرر k_i مرة في كل كلمة وذلك $\forall i\in[m]$ عندئذٍ فإن:

$$|W_n^{k_1,k_2,\dots,k_m}(A)| = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_m!}$$

تمرين: ما هو عدد حلول المعادلة: $x_1+x_2+\dots\dots+x_n=m$ بحيث $n,m\in\mathbb{N}^*$؟

الحل: طريقة أولى: إن عدد حلول المعادلة $x_1+\dots+x_n=m$ في $\mathbb{N}$ يساوي عدد طرق توزيع m كرة متماثلة على n صندوق وعدد طرق توزيع الكرات يساوي عدد طرق رسم $n-1$ خط شاقولي بين m كرة كما في الشكل التالي:



وهو يساوي عدد طرق اختيار $n-1$ شيء من بين $m+n-1$ ويساوي: $\binom{m+n-1}{n-1}$

توضيح:

نرسم $m+n-1$ مربع نختار منها $n-1$ مربع لنستبدلهم بمستقيمات ونستبدل باقي الـ m مربع بكرات فنحصل على توزيع $n-1$ مستقيم بين m كرة أي توزيع m كرة متماثلة في n صندوق.

$$\square\ \square\ \cdots\cdots\ \square$$

لاحظ أن:

$$\binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{m}$$

طريقة ثانية:

إذا كان $x_1=a_1, \dots\dots, x_n=a_n$ حلاً للمعادلة (أي $a_1+a_2+\dots+a_n=m$)

فلنكتب:

$$||\cdots|+||\cdots|+\cdots\cdots+||\cdots| \in W_{m+n-1}^{m,n-1}\{1,+\}$$

كل حل للمعادلة $x_1+x_2+\dots\dots+x_n=m$ يقابل كلمة وحيدة من $W_{m+n-1}^{m,n-1}(\{1,+\})$

وبالتالي فإن عدد حلول المعادلة السابقة هو:

$$\left|W_{m+n-1}^{m,n-1}(\{1,+\})\right| = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!} = \binom{m+n-1}{m}$$

سؤال دورة: أوجد $card\{A : A\subset[6]\}$ ؟

الحل: نلاحظ أن

$$card\{A : A\subset[6]\} = P([6])$$
$$= 2^6$$