المحاضرة الرابعة — الاثنين 17/4/2014

مبرهنة:

1- أثبت أن

$$|A^k_{[n]}| = |C^k_{[n]}| \cdot k!$$

2- استنتج أن عدد المجموعات الجزئية من $[n]$ والتي تحوي $k$ عنصر هو:

$$|C^k_{[n]}| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

الإثبات: صياغة أولى للحل: انطلاقاً من $[n]$

$|C^k_{[n]}|$ عددها $\{x_1,\dots,x_k\}$ $\{y_1,\dots,y_k\}$ ........ $\{z_1,\dots,z_k\}$

$(x_1,x_2,\dots,x_k)$ $(x_2,x_1,\dots,x_k)$ ..... $(x_k,\dots,x_1)$ $\}$ عددهم $k!$

نحصل على $A^k_{[n]}$ نأخذ جميع المجموعات الجزئية من $[n]$ والتي تحوي $k$ عنصر وعددها $|C^k_{[n]}|$ ومن ثم كل مجموعة مثل $B=\{x_1,\dots,x_k\} \in C^k_{[n]}$ ستعطينا $k!$ مرتبة من $B$ من الحجم $k$ وبالتالي عدد المرتبات الكلي من $[n]$ ومن الحجم $k$ هو:

$$|A^k_{[n]}| = |C^k_{[n]}| \cdot k!$$

صياغة ثانية للحل:

تعني اجتماع منفصل

$$A^k_{[n]} = \bigcup^{\cdot}_{B\in C^k_{[n]}} A^k_B \rightarrow |A^k_{[n]}| = \sum_{B\in C^k_{[n]}} |A^k_B| = \sum_{B\in C^k_{[n]}} A^k_{|B|}$$

$$= \sum_{B\in C^k_{[n]}} k! = k! \sum_{B\in C^k_{[n]}} 1 = k!\,|C^k_{[n]}|$$

صياغة ثالثة للحل:

$$A^k_{[n]} = \{(x_{f(1)}, x_{f(2)}, \dots\dots, x_{f(k)}) \in [n]^k : (x_1,\dots\dots,x_k) \in C^k_{[n]}\}$$

$$|A^k_{[n]}| = |C^k_{[n]}| \cdot |S_k| = |C^k_{[n]}| \cdot k!$$

2- من 1 لدينا $A^k_n = |C^k_{[n]}| \cdot k! = \dfrac{n!}{(n-k)!} \rightarrow |C^k_{[n]}| = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

مثلث باسكال :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & & & & & & & \binom{n}{n}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots
\end{array}
$$

منشور الكرخي - نيوتن :

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} ab^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + a^n$$

ملاحظة: نضرب أمثال الحد الذي نحن فيه بأس a ثم نقسم الناتج على رقم الحد فنحصل على أمثال الحد التالي

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

متطابقة باسكال : من مثلث باسكال نجد:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

مبرهنة:

$$\forall \ 1 \leq k \leq n \Rightarrow \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

الإثبات: (يمكن وضع هذه المبرهنة تحت عنوان تمرين: أثبت دون استخدام الرياضي أو الحساب المباشر)

$$C_{[n]}^{k} = X \dot{\cup} Y ; X = \{B \in C_{[n]}^{k} : n \in B\}$$

$$Y = \{B \in C_{[n]}^{k} : n \notin B\} = C_{[n-1]}^{k}$$

$$X = \{B = \{x_1, \ldots, x_{k-1}, n\} : \{x_1, \ldots, x_{k-1}\} \in C_{[n-1]}^{k-1}\}$$

$$\Rightarrow |X| = |C_{[n-1]}^{k-1}| = C_{n-1}^{k-1}$$

لكن $C_{[n]}^{k} = X \cup Y$

$$\rightarrow C_n^k = \left| C_{[n]}^{k} \right| = |X| + |Y| = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$$

I

تمارين : لدينا n صندوق يحوي كل منها على كرة بيضاء وكرة سوداء، نسحب من كل صندوق كرة واحدة فقط، بكم طريقة يمكن الحصول على k كرة بيضاء ($k \in [n]$) و $n-k$ كرة سوداء. توجيه : $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

II ① بكم طريقة يمكن جلوس شخص وزوجته على 4 كراسي

② بكم طريقة يمكن توزيع كرتان إحداهما بيضاء والأخرى سوداء على 4 صناديق.

③ ماهو عدد التوابع المتباينة من $[n]$ إلى $[4]$

④ ماهو عدد عناصر المجموعة : $A = \{(m,n) \in [4]^2 : m \neq n\}$

⑤ ماهو عدد الأعداد الطبيعية التي آحادها وعشراتها أصغر تماماً من 4 ولا تقبل القسمة على 11

III ليكن $1 \leq r \leq n$

بكم طريقة يمكن توزيع r كرة على n صندوق في الحالتين :

← الكرات متماثلة وكل صندوق يحوي كرة على الأكثر.

← الكرات متمايزة وكل صندوق يحوي كرة على الأكثر.

IV ماهو عدد حلول المعادلة :

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ في $[0,1]$

انتهت المحاضرة الرابعة