17/3/2014 الاثنين المحاضرة الثانية

الموضوع: الدوال ذات التغير المحدود (د. ت. م)

- تعريف: نقول عن دالة f أنها ذات تغير محدود إذا كان $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < +\infty$ إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ و إذا كانت P تجزئة للمجال $[a,b]$ بالشكل التالي:

$$P=\{a=x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n=b \;;\; x_0<x_1<x_2<\ldots\ldots<x_n\}$$ (تجزئة عشوائية)

$$P \in \mathbb{P}[a,b]$$

مجموعة من التجزئات الممكنة للمجال $[a,b]$

$$[a,x_1[\cup [x_1,x_2[\cup \ldots\ldots \cup [x_{n-1},b]$$

نشكل المجموع:

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

عندئذٍ يكون:

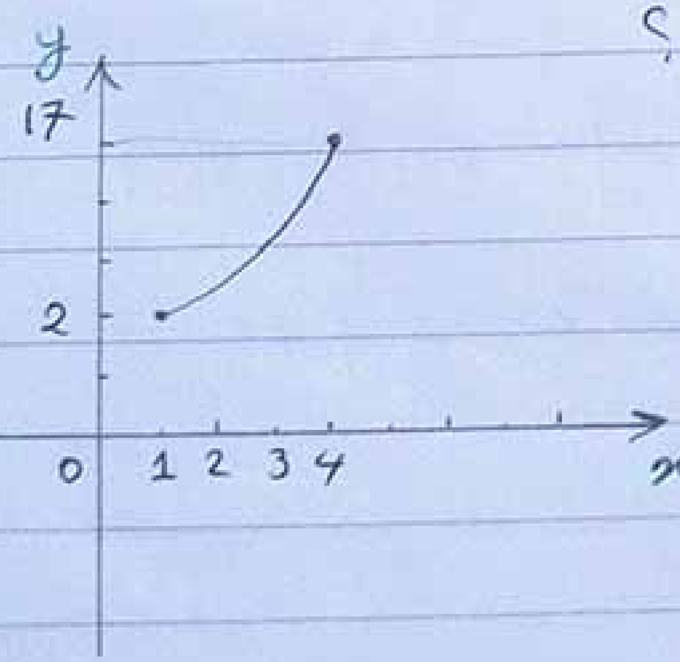
$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_{P\in\mathbb{P}[a,b]} V(f,P) < +\infty$$

ندعو $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ التغير الكلي للدالة f.

ملاحظة: إذا كان $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=+\infty$ عندئذٍ نقول إن الدالة f ليست ذات تغير محدود. (أو إذا أخذت عدة قيم)

ملاحظة: $V(f,P) \quad \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$

مثال (1): $f(x)=x^2+1$ معرفة على المجال $[1,4]$ والمطلوب: أوجد التغير الكلي للدالة f وهل f د. ت. م؟



الحل: لتكن لدينا التجزئة:

$$P=\{1=x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n=4\}$$

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$= |f(x_1)-f(x_0)| + |f(x_2)-f(x_1)| + \dots + |f(x_{n-1})-f(x_{n-2})| + |f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$= |x_1^2\cancel{+1}-x_0^2\cancel{-1}| + |x_2^2\cancel{+1}-x_1^2\cancel{-1}| + \dots + |x_n^2\cancel{+1}-x_{n-1}^2\cancel{-1}|$$

بما أنّ : $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$

كلي تنتهي

$$= x_1^2 - x_0^2 + x_2^2 - x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n-1}^2$$

$$= x_n^2 - x_0^2 = 16 - 1 = 15$$

$$\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P \in \mathcal{P}[\ ,4]} (15) = 15 < +\infty$$

⇐ إذا الدّالة f د.ت.م .

مثال (2): إذا كانت الدّالة f معرّفة على $[0,1]$ كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & ; x \in]0,1] \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

والمطلوب :

1. بيّن أنّ الدّالة f مستمرة على $[0,1]$
2. بيّن أنّ الدّالة f محدودة.
3. بيّن أنّ الدّالة f ليست ذات تغير محدود.

الحل 1 لتكن: $x_0 \in]0,1[$ (I)

$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} x_0} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} x_0} x\cos\frac{\pi}{2x} = x_0\cos\frac{\pi}{2x_0} = f(x_0)$$

(II) $x_0 = 0$: $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) \overset{?}{=} f(0)$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\cos\frac{\pi}{2x} = 0 = f(0)$$

لأن $\left|\cos\frac{\pi}{2x}\right| \le 1$ محدود و $\lim_{x\to 0} x = 0$ و منتهي في الصفر

Ⅲ $x_0 = 1$

$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = f(1) = 0$

$\Leftarrow$ f مستمر على $[0,1]$

$f(x) = \left|x\cos\frac{\pi}{2x}\right| \quad ; x \in]0,1]$

$\boxed{2}$ ولدينا :

$\left|x\cos\frac{\pi}{2x}\right| \le 1 \Leftarrow \left|\cos\frac{\pi}{2x}\right| \le 1$

$f(x) = 0 \Leftarrow x = 0$

نستنتج أنه في جميع الحالات يكون : $\forall x \in [0,1] : |f(x)| \le 1$

وبالتالي f محدود على $[0,1]$

$\boxed{3}$ نختار تجزئة :

$P = \{0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n-2} < \dots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1\}$

ملاحظة :

نحاول ان نعمل على التجزئات النونية المتعلقة بـ n .

$V(f,P) = \left|f(\tfrac{1}{2n}) - f(0)\right| + \left|f(\tfrac{1}{2n-1}) - f(\tfrac{1}{2n})\right| + \dots +$

$\left|f(\tfrac{1}{2}) - f(\tfrac{1}{3})\right| + \left|f(1) - f(\tfrac{1}{2})\right|$

$= \left|\frac{1}{2n}\cos n\pi - 0\right| + \left|\frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{2}\pi - \frac{1}{2n}\cos n\pi\right| + \dots$

$\dots + \left|\frac{1}{2}\cos\pi - \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\pi\right| + \left|0 - \frac{1}{2}\cos\pi\right|$

$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots\cdots + 1$$

$$\Rightarrow V(f, P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$ (المتسلسلة التوافقية)

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

⇐ الدالة f ليست ذات تغير محدود.

تذكرة: تتقارب متسلسلة إذا وفقط إذا تقاربت متتالية المجاميع الجزئية لها وتكون نهاية متتالية المجاميع الجزئية هو مجموع المتسلسلة.

انتهت المحاضرة الثانية