المحاضرة الرابعة

مبرهنة: لتكن $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k \in \mathbb{Z}^{+*}$ عندئذٍ المتراجحة التالية محققة:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 - (k-1)(2\sum_{i=1}^{k} n_i - k$$

الإثبات: قبل إثبات هذه النظرية لنطبق على الأعداد: $3,5,1,2$

$$39 \leqslant 121 - (4-1)(2\times 11 - 4)$$
$$39 \leqslant 121 - 3 \cdot 18$$
$$39 \leqslant 67$$
«محققة»

الإثبات: إذا كانت الأعداد n_k غير معدومة عندئذٍ:

$$(n_1-1),(n_2-1),\ldots\ldots,(n_k-1) \geqslant 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{k}(n_i-1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$\left[\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{k} n_i - k\right]^2 \rightarrow$$

$$\left[\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 - 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2 \quad \star$$

ملاحظة:

(خاصية)

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y+z)^2 = x^2 + 2x(y+z) + (y+z)^2$$
$$= x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$
$$(x+y+z+m)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + m^2 + 2xy + 2xz + 2xm + 2yz + 2ym + 2zm$$

عندئذٍ وبالاعتماد على الخاصية السابقة:

$$\left(\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\right)^2 = \left((n_1-1)+(n_2-1)+\ldots\ldots+(n_k-1)\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)^2 + 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (n_i - 1)(n_j - 1) \quad ; \; i \neq j$$

وبالتالي وبالتعويض في * نجد :

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \sum_{j=1}^{k} (n_i - 1)(n_j - 1) = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \right)^2 - 2k \sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

ولكن نعلم أن :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \sum_{j=1}^{k} (n_i - 1)(n_j - 1) \geqslant 0$$

وبحذف هذا المقدار نجد :

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \right)^2 - 2k \sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i^2 - 2n_i + 1) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \right)^2 - 2k \sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{k} n_i + k \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \right)^2 - 2k \sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \right)^2 - 2k \sum_{i=1}^{k} n_i + 2 \sum_{i=1}^{k} n_i + k^2 - k$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^{k} n_i (k-1) + k(k-1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \right)^2 - (k-1)\left(2 \sum_{i=1}^{k} n_i - k\right) \qquad \mathrm{I}$$

مبرهنة : (هامة جداً) سؤال دورة ب 35 marks

ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ بحيث $|V| = n \neq 0$ و $E \neq \phi$ بحيث يكون هذا البيان بسيط (لا يحوي عرى ولا أضلاع مضاعفة) ولكن هذا البيان G مكون من k مركبة :

$C_1(V_1;E_1), C_2(V_2;E_2), \ldots\ldots, C_k(V_k;E_k)$

وهي مجموعات منفصلة مثنى مثنى أي :

$$V_i \cap V_j = \phi \ ; \ i \neq j \ \wedge \ \bigcup_{i=1}^{k} V_i = V$$

$$\wedge \ E_i \cap E_j = \phi \ ; \ i \neq j \ \wedge \ \bigcup_{i=1}^{k} E_i = E$$

عندئذٍ فإنّ عدد الأضلاع E في البيان الأصلي :

$$|E| \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1).$$

الإثبات : سنثبت هذه المبرهنة بالاستقراء الرياضي:

الحالة الأولى : نفرض أن البيان مكون من مركبة واحدة عندئذٍ $k=1$

$$\Rightarrow |E| \leq \frac{1}{2}(n-1)(n).$$

وهي صحيحة للأسباب التالية :

إنّ البيان G هو بيان بسيط فلا يحوي عرى ولا أضلاع مضاعفة

$$\rightarrow \forall x \in V : deg(x) \leq n-1.$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in V} deg(x) \leq n(n-1) \rightarrow 2|E| \leq n(n-1)$$

$$\rightarrow |E| \leq \frac{1}{2} n(n-1) *$$

الحالة الثانية : إذا كان البيان مكون من أكثر من مركبة أي $k>1$ ، في هذه الحالة كل مركبة من مركبات هذا البيان هي عبارة عن بيان بسيط وهي تحقق العلاقة

$$\forall C_i (V_i ; E_i) \rightarrow |E_i| \leq \frac{1}{2} n_i (n_i - 1) \quad \leftarrow *$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} |E_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1)$$

إنّ :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) = \sum_{i=1}^{k} (n_i^2 - n_i) = \sum_{i=1}^{k} n_i^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i$$

وحسب I نجد :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 - (k-1)\left(2\sum_{i=1}^{k} n_i - k\right)$$

وبما أنّ :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

فإنّ :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 - (k-1)\left(2\sum_{i=1}^{k} n_i - k\right) - n$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 - (k-1)\left(2\sum_{i=1}^{k} n_i - k\right)$$ ، حيث $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) \leq n^2 - (k-1)(2n-k) = n$$

$$= n^2 - (2nk - 2n - k^2 + k) - n$$
$$= n^2 - 2nk + 2n - n + k^2 - k$$
$$= n^2 - 2nk + n + k^2 - k$$
$$= n^2 - (2k-1)n + k(k-1)$$

نريد أن نبحث عن عددين مجموعهما $(2k-1)$ وجداؤهما $k(k-1)$

بملاحظة العددين k و $k-1$ نجد أنّ :

$$\left.\begin{array}{l} k + k - 1 = 2k - 1 \\ k \cdot (k-1) = k(k-1) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$n^2 - (2k-1)n + k(k-1) = (n-(k-1))(n-k)$$
$$= (n-k+1)(n-k)$$

وبالعودة للمجموع :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) \leq (n-k)(n-k+1)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

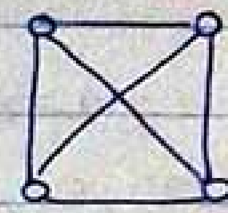
$$\rightarrow |E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

$$\Rightarrow |E| \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

حيث :

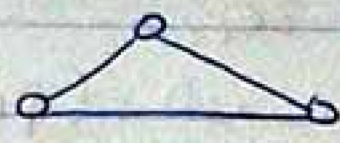
k عدد المركبات في البيان ، $|V| = n$ عدد العقد في البيان

أمثلة توضح البرهنة السابقة : لتكن لدينا البيانات التالية :



$n=4$, $|E|=6$

$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{4(3)}{2}=6$$



$n=3$, $|E|=3$

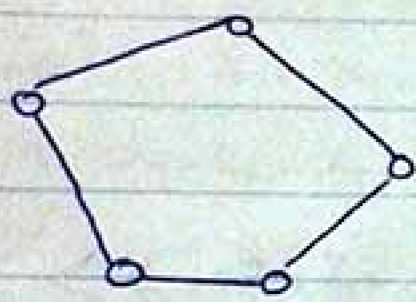
$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{3(2)}{2}=3$$

$n=2$, $|E|=1$

$$\rightarrow \frac{n(n-1)}{2}=\frac{2(1)}{2}=1$$

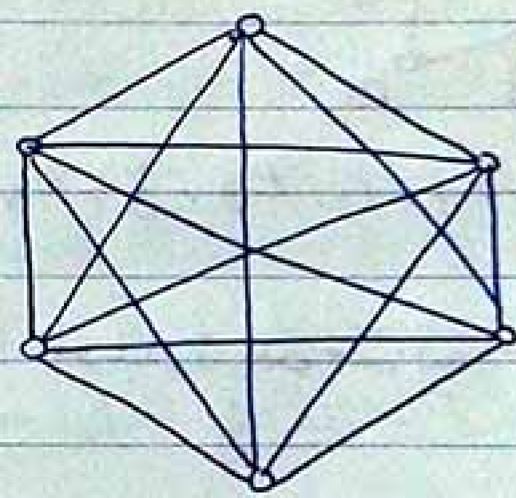
وبالتالي $|E|$ لا يمكن أن تتجاوز $\frac{n(n-1)}{2}$

أمثلة داعمة للفكرة المطروحة :



$n=5$, $|E|=5$

$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{5(4)}{2}=10$$



$n=6$, $|E|=15$

$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{6(5)}{2}=15$$

انتهت المحاضرة الرابعة