Subject: 15/4/2014

«المحاضرة العاشرة»

مبرهنة: 7-3-4.

- لتكن R حلقة تبديلية واحدية ، العبارات التالية متكافئة :

[1]- R محلية

[2]- $\exists\, m \triangleleft_{\circ} R : \forall a \in m , \forall b \in R ;\ 1 - ab \in U(R)$

[3]- $\exists\, m \triangleleft_{\circ} R : \forall a \in m ;\ 1 + a \in U(R)$

[4]- $\Sigma = R / U(R)$ (مثالي في R)

الإثبات: [1] ⇐ [2]

R محلية $\Rightarrow \exists\, m = J(R) \triangleleft_{\circ} R \Rightarrow$ «حسب مبرهنة 5-3-4».

$\forall a \in J(R) , b \in R \Rightarrow 1 - ab \in U(R)$ $\boxed{\exists ab \Rightarrow \exists \cdot ab}$

#

[2] ⇐ [1] «نريد إثبات أن $J(R)$ مثالي أعظمي»

*- $J(R) = \bigcap_{m \in m\text{-}spec(R)} m \subseteq m$ #

*- $\forall a \in m \Rightarrow \forall b \in R ;\ 1 + ab \in U(R) \Rightarrow a \in J(R)$

«حسب مبرهنة 5-3-4»

$\Rightarrow m \subseteq J(R)$

ومن الاحتوائين نجد :

$m = J(R) \triangleleft_{\circ} R \Rightarrow$ R محلية

#

[2] ⇐ [3]

$b = -1 ;\ \exists\, m \triangleleft_{\circ} R : \forall a \in m ;\ 1 - (-1)a = 1 + a \in U(R)$

#

$\boxed{2} \Leftarrow \boxed{3}$

$\exists \mathcal{M} \triangleleft_{\circ} R : \forall a \in \mathcal{M} \Rightarrow \forall b \in R$ ؛

$-ab \in \mathcal{M} \Rightarrow 1 + (-ab) \in U(R)$

#

((لأنّ $0 \neq 1 \in U(R)$)) $\boxed{4} \Leftarrow \boxed{3}$

*- $0 \in \text{ك} \Rightarrow \text{ك} \neq \emptyset$

*- $\forall r \in R \wedge \forall x, y \in \text{ك}$ ؛

*- نفرض جدلاً أن :

$r.x \notin \text{ك} \Rightarrow r.x \in U(R) \Rightarrow \exists a \in R$:

$1 = a.(rx) = (ar).x \Rightarrow x \in U(R)$

مما ينافي كون $x \in \text{ك}$ ، أي : $r.x \in \text{ك}$

*- نفرض جدلاً أن :

$x - y \notin \text{ك} \Rightarrow x - y \in U(R) \Rightarrow \exists a \in R$:

$((1 = ax - ay))$

- $x \in \text{ك} \Rightarrow x \notin U(R) \Rightarrow \exists \mathcal{M}_1 \triangleleft_{\circ} R : x \in \mathcal{M}_1$

((مبرهنة ((المثالي $\neq$ الحلقة ⇐ يوجد مثالي أعظمي يحويه))

- $y \in \text{ك} \Rightarrow y \notin U(R) \Rightarrow \exists \mathcal{M}_2 \triangleleft_{\circ} R : y \in \mathcal{M}_2$

ومنه :

$+ay \in \mathcal{M}_2 \Rightarrow 1 + ay \in U(R) \Rightarrow \underbrace{ax}_{\in \mathcal{M}_1} = 1 + ay \in U(R)$

$\Rightarrow \mathcal{M}_1 = R$ ↯ (غير ممكن) ((⇐ لا يمكنه أن يحوي عنصر مقلوب))

⇐ الفرض الجدلي خاطئ ⇐

$x - y \in \text{ك} \Leftrightarrow \text{ك} \triangleleft R$

#

Subject: / /

$\boxed{3} \Leftarrow \boxed{4}$

- نعرف المجموعة: $M = \{ J \not\trianglelefteq R , \forall a \in J ; 1 + a \in U(R) \}$

$\star -\ \{0\} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$

- لنفرض جدلاً أن:

$\forall a \in \{0\}' ; 1 + a \notin U(R) \Rightarrow 1 + a \in \{0\}'$

ومنه:

$1 = \underbrace{(1+a)}_{\in \{0\}'} - \underbrace{a}_{\in \{0\}'} \Rightarrow 1 \in \{0\}'$ (غير ممكن)

تم تصحيح الغرض الجدلي

⇐ الفرض الجدلي خاطئ ..

⇐ $1 + a \in U(R)$ ، وبالتالي:

- لتكن $(M, \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء .

ولتكن أيضاً:

$J_1 \subseteq J_2 \subseteq \ldots$

إن: $J = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ "مثالي في R الذي بسبب علاقة الاحتواء"

وإن: $J \not\trianglelefteq R$ [لأنه إذا كان $J = R \Leftarrow 1 \in J$ $\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} : 1 \in J_i$ (غير ممكن)]

وكذلك:

$\forall a \in J = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i ; 1 + a \in U(R)$

<< لأنه: إذا كان

$\exists a \in J : 1 + a \notin U(R) ; \exists i \in \mathbb{N} : a \in J_i ; 1 + a \notin U(R)$

وهذا غير ممكن >>

- وبالتالي: يكون J حداً أعلى للسلسلة في M . ومنه

"من تمهيدية زورن" فإنه: يوجد $\mathcal{M}$ عنصر أعظمي

في M .. أي:

$\mathcal{M} \triangleleft . R , \forall a \in \mathcal{M} ; 1 + a \in U(R)$

#

Subject: / /

$\boxed{1} \Leftarrow \boxed{4}$

لنفرض أن: $\mathcal{S} = R \setminus U(R)$ مثالي، عندئذٍ: $J(R) = \mathcal{S}$

فيكون حسب التعريف السابق $J(R)$ مثالي أعظمي.

$$\Leftrightarrow J(R) = \bigcap_{m \in M\text{-}Spec(R)} m \subseteq R \setminus U(R) = \mathcal{S}$$

*- لنفرض جدلاً أن: $\underline{\forall x \in \mathcal{S}}$ و $x \notin J(R)$

$$\Rightarrow 1+x \notin U(R) \Rightarrow 1+x \in \mathcal{S} \Rightarrow 1 = \overset{\in\mathcal{S}}{-x} + \overset{\in\mathcal{S}}{(1+x)} \in \mathcal{S}$$

$$\Rightarrow 1 \in \mathcal{S} \quad \text{(غير ممكن)}$$

لأنه يناقض كون:

$$\mathcal{S} = R \setminus U(R)$$

$\Leftarrow$ الفرض الجدلي خاطئ $\Leftarrow$ $\underline{x \in J(R)}$

$$\Rightarrow \mathcal{S} \subseteq J(R) \Longrightarrow \text{“} \mathcal{S} = J(R) \text{”}$$

ولكن

$$J(R) \vartriangleleft_{\circ} R \Leftarrow \mathcal{S} \vartriangleleft_{\circ} R$$

$\Leftarrow$ R محلية.

#

$\boxed{4} \Leftarrow \boxed{1}$

R محلية $\Leftarrow$ $J(R) \vartriangleleft_{\circ} R$.

- أولاً: $0 \in \mathcal{S} \Leftarrow \mathcal{S} \neq \emptyset$.

ومنه:

$$\forall r \in R \wedge \forall x, y \in \mathcal{S}$$

لنفرض جدلاً أن:

$$\text{“} r.x \notin \mathcal{S} \text{”}$$

$\Rightarrow r.x \in U(R) \Rightarrow \exists a \in R \;,\; 1 = r.x$

$\Rightarrow x \in U(R)$

وهذا ينافي فرض كون $x \in \mathfrak{I} \Leftarrow r.x \in \mathfrak{I}$

وكذلك: لنفرض جدلاً أن:

$x - y \notin \mathfrak{I} \Rightarrow x - y \in U(R) \Rightarrow \exists a \in R :$

« $1 = ax - ay$ »

$\Rightarrow \overset{\in J(R)}{ax} = 1 + ay \in U(R)$ « غير ممكن »

لأن، $J(R) \lhd_{\circ} R$ .. ⇐ الفرض الجدلي خاطئ.

$\Rightarrow x - y \in \mathfrak{I} \Rightarrow \mathfrak{I} \lhd R$

#

- تمرين - حمد -

لتكن R حلقة تبديلية واحدية ، و $\mathfrak{I} = R / U(R)$.

1- بيّن أنه ليس بالضرورة أن تكون $\mathfrak{I}$ مثالي في R.

2- إذا كانت $\mathfrak{I} \lhd R$ ، فإن: $\mathfrak{I} \in m\text{-}spec(R)$.

4-3-8- تعريف:

I_1, I_2 أولية فيما بينها إذا وفقط إذا تحقق: $R = I_1 + I_2$

Subject: / /

4-3-9 - مبرهنة الباقي الصينية -
« Chinese Remainder Theorem »

- لتكن R حلقة تبديلية واحدية ، ولتكن :

$$I_1, I_2, \ldots, I_n \trianglelefteq R$$

ولتكن :

$$\varphi : R \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} R/I_i$$

المعرف بالشكل :

$$\forall r \in R : \varphi(r) = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n) \quad , \quad \bar{r}_i = r + I_i$$

حيث : $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ - عندئذٍ فإن :

1 - إذا كانت I_i مثاليات أولية فيما بينها (مثنى مثنى) .

فإن :

$$\bigcap_{i=1}^{n} I_i = \prod_{i=1}^{n} I_i$$

2 - φ غامر $\Longleftrightarrow$ I_i أولية فيما بينها مثنى مثنى .

3 - $$Ker(\varphi) = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$$

« الإثبات »

1 - « بالاستقراء الرياضي على (n) » .

- من أجل « n = 2 » -

$$\left.\begin{array}{l} I_1 . I_2 \subseteq I_1 \\ I_1 . I_2 \subseteq I_2 \end{array}\right\} \Rightarrow I_1 . I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$$

$$- \forall x \in I_1 \cap I_2 \Rightarrow x \in I_1 \wedge x \in I_2$$

Subject:

$R = I_1 + I_2$ مهما أخذنا أولياتنا نسبياً .. فإن :

$\Rightarrow \exists a \in I_1 , b \in I_2 \;:\; 1 = a + b \Rightarrow (\times x)$

$x = ax + bx \in I_1 . I_2 \Rightarrow$

$x \in I_2 , x \in I_1 \Rightarrow x \in \cap \wedge \cap = \pi \Rightarrow x \in \pi$

$I_1 \cap I_2 \subseteq I_1 . I_2 \Rightarrow I_1 \cap I_2 = I_1 . I_2$

#

- لنفرض صحة القضية لأجل $(n-1)$ ، ولنبرهن صحتها لأجل (n) ..

عندئذٍ : لدينا : $R = I_1 + I_n \Leftarrow$

$\exists x_1 \in I \;, x_n \in I_n \;:\; 1 = x_1 + x_n$

$\Rightarrow x_n \equiv 1 \;(\mathrm{mod}\text{-} I_1)$

عندئذٍ :

$\forall i \in \{2, \dots, n\} \;;\; x_2 . x_3 . \dots . x_n = 1 \;(\mathrm{mod}\text{-} I_n)$

$\Rightarrow I_2 . I_3 . \dots . I_n \wedge I_1 \rightarrow$ أوليان فيما بينهما

$\Rightarrow I_1 \cap (I_2 \dots I_n) = I_1 . (I_2 \dots I_n)$

$= I_1 \cap (I_2 \cap \dots \cap I_n) = I_1 . I_2 \dots I_n$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} I_i = \prod_{i=1}^{n} I_i$$

#

$\boxed{\Pi \text{ ا } \sum}$

Subject: / /

$Pr: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \to (x,y)$ Pr غامر
مشتمل مشتابك معه

$(\Leftarrow)$ $\boxed{2}$ -

- لنعرف التطبيق:

$$\psi : R \xrightarrow{\varphi} \prod_{i=1}^{n} R/I_i \xrightarrow{Pr} R/I_i \times R/I_n$$

إن φ حسب الفرض غامر و Pr غامر $\Leftarrow$ التركيب غامر.

وبالتالي:

$$(\bar{1}, \bar{0}) \in R/I_i \times R/I_n \Rightarrow$$

$$\exists x \in R : (\bar{1}, \bar{0}) = \psi(x) = pr(\varphi(x)) = (\bar{x}_i, \bar{x}_n)$$

$$\Rightarrow \bar{1} = \bar{x}_i \wedge \bar{0} = \bar{x}_n \Rightarrow 1 + I_i = x + I_i$$

$$\wedge\ I_n = x + I_n$$

$$\Rightarrow 1 = x + y \quad ; \quad y \in I_i \wedge x \in I_n$$

لأن: $x \in I_n \wedge y \in I_i$
$\Rightarrow x + y \in I_i + I_n$
$\Rightarrow I_i + I_n = R$
$\Rightarrow I_i \wedge I_n$
أوليان نسبياً

$\Leftarrow$ I_n و I_i أوليان فيما بينهما

وبالمثل كذا أن: I_i
جميعها أوليات فيما بينها
مثنى مثنى.

$\#$

$(\Rightarrow)$

سوف نثبت أن: $Im\,\varphi \subseteq \prod_{i=1}^{n} R/I_i$ (البرهان $Im \subseteq$)

$$\Rightarrow$$

$$\forall \bar{x} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n) \in \prod_{i=1}^{n} R/I_i$$

- لنأخذ: (I_1 و I_n) وهما أوليان متباينان . (لأن I_i أوليات نسبياً)

$$\Rightarrow R = I_1 + I_n \Rightarrow \exists\, r_1 \in I_1 ,\ r_n \in I_n \ :\ 1 = r_1 + r_n$$

$$\Rightarrow r_n \equiv 1 \pmod{I_1} \Rightarrow r_2 \cdot r_3 \cdot \ldots \cdot r_n \equiv 1 \pmod{I_1}$$

عندئذٍ: لو أخذنا .

$\varphi(\overbrace{r \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \ldots \cdot r_n}^{y})$ ~~[illegible]~~ $\rightarrow$ "سوف يساوي"

و $\varphi(r \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n) = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$ $\rightarrow$ "سوف يساوي"

$$= (\bar{r}, \bar{0}, \ldots, \bar{0})$$

عندئذٍ:

$$\bar{y}_2 = (r \cdot \overset{\in I_2}{r_2} \cdot r_3 \cdot \ldots \cdot r_n) + I_2 = I_2 = \bar{0}$$

كذلك:

$$\bar{y}_1 = r \cdot \overset{\in \operatorname{Im}\varphi}{\boxed{r_2 \cdot r_3 \cdot \ldots \cdot r_n}} + I_1 \Rightarrow$$

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} ;\ (0, \ldots, 0, \bar{r}_i, 0, \ldots, 0) \in \operatorname{Im}(\varphi)$$

(وبتكرار ذلك لأجل كل (i))

وبالتالي:

$$\bar{x} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n) = (\bar{r}_1, 0, \ldots, 0) + (0, \bar{r}_2, \ldots, 0)$$

$$+ \cdots + (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{r}_n) \in \operatorname{Im}\varphi$$

($\operatorname{Im}\varphi$ حلقة جزئية مغلقة)

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} R/I_i \subseteq \operatorname{Im}\varphi \quad \Rightarrow$$ (من الاحتواءين)

$$\prod_{i=1}^{n} R/I_i = \operatorname{Im} \varphi \Rightarrow$$ غامر φ

\#

$\boxed{3}$ - لتكن : $x \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow$

$$\varphi(x) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = (\bar{0}, \dots, \bar{0})$$

$$\Rightarrow \bar{x}_i = x + I_i \; : i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Leftrightarrow x + I_i = I_i \; : i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Leftrightarrow x \in I_i \; ; i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i$$

ومنه : $\ker(\varphi) = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$

\#

تمرين :

- بيّن أنّ .. $\prod_{i=1}^{n} R/I_i \cong R/\prod_{i} I_i$

$$\cong R/\bigcap I_i$$

إذا كانت : $I_1, I_2, \dots, I_n \trianglelefteq R$ أولية فيما بينها .

«مبرهنة» .

- مثال :

$I_1 = \langle 2 \rangle,\ I_2 = \langle 3 \rangle,\ I_3 = \langle 11 \rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}/I_1 \times \mathbb{Z}/I_2 \times \mathbb{Z}/I_3 = \mathbb{Z}/\langle 66 \rangle$

$3\times 0 \in I_1+I_2$
$2\times 0 \in I_1+I_2$
[illegible]
$-2\times 0 \in I_1+I_2$
$\Rightarrow 3-2=1 \in I_1+I_2$
$\Rightarrow$ [illegible]

وهذا الكلام صحيح حسب مبرهنة الباقي الصينية ..

و الكلام السابق مماثل ..

$\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11} \cong \mathbb{Z}_{66}$

#