$$= I_{n-2}\frac{1}{1-n}\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x} + \frac{1}{1-n}\int \frac{1}{\sin^{n-2}x}\,dx$$

$$= I_{n-2}\frac{1}{1-n}\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x} + \frac{1}{1-n} I_{n-2}$$

بإخراج I_{n-2} كعامل مشترك

$$I_n = \frac{1}{1-n}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \left(1+\frac{1}{1-n}\right) I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{1}{1-n}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{2-n}{1-n} I_{n-2}$$

- التكاملات التي تؤول إلى كسرية

① تكاملات أسية $\int f(e^x, e^{x+m})\,dx$

② تكاملات مثلثية $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$

③ تكاملات زائدية $\int f(\sinh x, \cosh x)\,dx$

④ التكاملات الجذرية من الدرجة الأولى.

⑤ التكاملات الجذرية الثنائية من الدرجة الثانية.

⑥ ثنائي الحد التفاضلي.

⑥ الجذور من الدرجة الأولى

$$\int f\left(x, x^{\frac{p_1}{r_1}}, x^{\frac{p_2}{r_2}}, \dots, x^{\frac{p_n}{r_n}}\right);\ x = t^s$$

$$\int f\left((ax+b)^{\frac{p_1}{r_1}}, \dots, (ax+b)^{\frac{p_n}{r_n}}\right)dx$$

$$;(ax+b) = t^s$$

مبدأ S المضاعف المشترك الأصغر للمقامات $r_1, r_2, \dots, r_n$

⑥ الجذور التربيعية

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

① $a>0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t$

② $c>0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + xt$

③ $x^2+bx+c = (x-\alpha)(x-\beta)$

$$\sqrt{x^2+bx+c} = (x-\alpha)t$$

⑦ ثنائي الحد التفاضلي

$$\int x^m (ax^n+b)^p\,dx \quad m,n,p \in \mathbb{Q}$$

① $p \in \mathbb{N}$ يتم نشر $(ax^n+b)^p$ ثم تكامل

② $p \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ يتم فرض $x = t^s$ حيث s المضاعف المشترك لمقامات m, n

③ $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z};\ p \notin \mathbb{Z}$ يتم فرض $(ax^n+b) = t^s$ حيث s مقام p

④ $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z};\ p \notin \mathbb{Z}$ ولكن $\left(p+\frac{m+1}{n}\right) \in \mathbb{Z}$ نفرض $a+bx^{-n} = t^s$ حيث s مقام p.

ALMUVID.net

حل التكاملات التالية:

$I_1=\int \frac{dx}{e^{2x}-1}$ ، $I_2=\int \frac{dx}{e^x+1}$

$I_3=\int (e^x+e^{-x})^2 dx$ ، $I_4=\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} dx$

$I_1=$ لو نفرض $e^x=t \Rightarrow e^x dx=dt$

$dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$

$I_1=\int \frac{1}{t^2-1}\frac{dt}{t}=\int \frac{dt}{t(t-1)(t+1)}$

$\frac{1}{t(t-1)(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}$

$t\longrightarrow t=0 \Rightarrow \boxed{A=-1}$

$t-1\longrightarrow t=1 \Rightarrow \boxed{B=1/2}$

$t+1\longrightarrow t=-1 \Rightarrow \boxed{C=1/2}$

$I_1=A\ln|t|+B\ln|t-1|+C\ln|t+1|$

$=A\ln|e^x|+B\ln|e^x-1|+C\ln|e^x+1|$

$=-1\ln|e^x|+1/2\ln|e^x-1|+1/2\ln|e^x+1|$

$I_2=$ نحل بنفس الطريقة $e^x=t$

$I_3=$ بنشر المربع عن العدد

ويكون التكامل عبارة عن مجموع I_n و I_{n-1} و $\ln|$ المقام $|$

ملاحظة:

$\int_{-2}^{2} \sin^5 x\, dx$

بملاحظة أن التابع $\sin x$ هو تابع فردي ومحدود من -2 إلى 2 فإن التكامل يكون 0 وذلك للتكامل.

التكاملات المثلثية:

1) $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\, dx$

2) $\int \begin{cases} -\sin mx \cos nx\, dx \\ -\sin mx \cdot \sin nx\, dx \\ -\cos mx \cos nx\, dx \end{cases}$

3) $t=\tan\frac{x}{2}$ التحويل الى كسري

إذا كان n,m أعداد زوجية $\in N$ فإن

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\cos(m-n)x]$

$\sin_\cdot\sin_=-\frac{1}{2}[\cos(m+n)x-\cos(m-n)x]$

$\cos_\cdot\cos_=\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]$

- إذا كان أحد n أو m عدد فردي والآخر زوجي

$\int (\sin^2)^k \cos^m x \cdot \sin x\, dx$

ننشر القوس، وحيث $\frac{1-\cos x}{2}$

$I_3=\int \tan^3\frac{x}{2}\,dx$ ،

$I_4=\int \frac{\sin x-\cos x}{1+\cos x}\,dx$

$I_5=\int \sin 3x\cdot\cos 2x\,dx$

$I_6=\int \cos^7 x\cdot \sin^4 x\,dx$

$I_7=\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$ ، $I_8=\int \frac{\cos 3x}{\sin^5 x}\,dx$

I_1, I_2, I_3, I_4 نوجد

$I_1=\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=\ln|t|+c$ ، $t=\tan\frac{x}{2}$

$=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$

$I_2=\int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int\frac{2}{1-t^2}\,dt$

$=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c$

$I_3=\int t^3\frac{2\,dt}{1+t^2}=2\int\frac{t^3}{t^2+1}\,dt$

$=2\left[\int t\,dt-\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}\,dt\right]$

$=2\left[\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|t^2+1|\right]+c$

$=t^2-\ln|t^2+1|+c$

$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

- لو قسمنا بين ① وحولنا ① الى $\cos^2 x+\sin^2 x$

$\Rightarrow \sin x=2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$

$=\frac{2t}{1+t^2}$ } نتج هذا المقدار بقسمة البسط والمقام على $\cos\frac{x}{2}$

$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$

$\Rightarrow \cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

$t=\tan\frac{x}{2}$

بالاشتقاق:

$dt=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx$

$$\boxed{dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt}$$

مثال: لتكن لدينا:

$I_1=\int\frac{dx}{\sin x}$ ، $I_2=\int\frac{dx}{\cos x}$

ALNADIB.net

لحاجة إلى التكاملات المثلثية
حل التكاملات التالية:

$$I_1=\int \cos^7 x \sin^4 x\, dx$$

$$I_2=\int \sin 3x \cos 2x\, dx$$

$$I_3=\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx$$

$$I_5=\int \cos^4 x \sin^2 x\, dx$$

$$I_4=\int \cos 3x \sin^5 x\, dx$$

$$I_6=\int \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}-x^{1/2}}\, dx$$

قد نطرح بعض الأحيان لنوضح
$t=\tan\frac{x}{2}$ أو $t=\tan x$

$$I_1=\int \cos^7 x \cdot \sin^4 x\, dx$$ الحل

$$I_1=\int \cos^6 x \cdot \sin^4 x \cdot \cos x\, dx$$

$$=\int (\cos^2 x)^3 \cdot \sin^4 x \cos x\, dx$$

$$=\int (1-\sin^2 x)^3 \cdot \sin^4 x \cdot \cos x\, dx$$

حسب طريقة تغيير المتحول

$$t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x\, dx$$

$$I_1=\int (1-t^2)^3\, t^4\, dt$$

لوضعنا البسط والمقام

$$I_4=\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}-\frac{\cos x}{1+\cos x}$$

وبالتعويض في I:

$$I_4=-\int \frac{-\sin x}{1+\cos x}\, dx-\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\, dx$$

$$=-\ln|1+\cos x|$$

$$-\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1+t^2}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

بتوصيل المتممات نتابع الحل

$$=-\ln|1+\cos x|-\int \frac{2(1-t^2)}{2(1+t^2)}\, dt$$

$$=-\ln|1+\cos x|+\int \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) dt$$

$$I_4=-\ln|1+\cos x|+\int \frac{t^2+1-1-1}{1+t^2}\, dt$$

$$=-\ln|1+\cos x|+\int 1\, dt-2\int \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$=-\ln|1+\cos x|+t-2\arctan t+c$$

انتهت الطريقة