المحاضرة السابعة — الأربعاء 26/3/2014

الفصل الثاني: متتاليات ومتسلسلات التوابع العقدية.

تعريف: تعرف متتالية التوابع العقدية بأنها متتالية عناصرها توابع عقدية معرفة على نفس المجموعة $A \subset \mathbb{C}$ وهي من الشكل:

$$\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}^*} = \{f_1(z), f_2(z), \ldots\}$$

حيث ندعو التابع $f_n(z)$ بتابع الحد العام وهو من الشكل:

$$f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f_n(z)$$

ونقول أن المتتالية $\{f_n(z)\}$ أنها متقاربة من التابع $f(z)$ في A (معرّف على A) إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall z\in A : \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

بمعنى آخر:

$$\forall \varepsilon>0 : \exists \delta(\varepsilon)>0 \,;\, \forall n>\delta(\varepsilon), \forall z\in A : |f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$$

وبما أن $\mathbb{C}$ فضاء تام فيمكن كتابة الشرط السابق كما يلي:

$$\forall \varepsilon>0 : \exists \delta(\varepsilon)>0 \,;\, \forall n,m>\delta(\varepsilon), \forall z\in A : |f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$$

مبرهنة: بفرض $\{f_n(z)\}$ متتالية من التوابع العقدية المستمرة على A والمتقاربة من التابع $f(z)$ عندئذٍ التابع $f(z)$ مستمر على A.

الإثبات:

بما أن $\{f_n(z)\}$ متقاربة من $f(z)$ فإنه:

$$\forall \varepsilon>0 \to \frac{\varepsilon}{3}>0 : \exists \delta(\varepsilon)\geq 0 \,;\, \forall n>\delta(\varepsilon), \forall z\in A : |f_n(z)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

وبما أن $\{f_n(z)\}$ تابع مستمر على A فإنه من أجل $z_0\in A$ يكون:

$$\forall \varepsilon>0 \to \frac{\varepsilon}{3}>0 : \exists \delta(\varepsilon)>0 \,;\, |z-z_0|<\delta(\varepsilon) : |f_n(z)-f_n(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

ومنه من أجل $z_0\in A$ يمكن أن نكتب:

$$|f(z)-f(z_0)| \leq |f_n(z)-f(z)| + |f_n(z)-f_n(z_0)| + |f_n(z_0)-f(z_0)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

مبرهنة: بفرض $\{f_n(z)\}$ متتالية من التوابع العقدية المعرفة على A والمتقاربة من $f(z)$ وبفرض γ منحني بسيط واقع في A عندئذٍ:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,dz$$

$$= \int_\gamma f(z)\,dz$$

الإثبات:

بما أنّ $f(z)$ متقاربة من $\{f_n(z)\}$ فإنّ:

$$\forall \varepsilon>0 : \exists\, \delta(\varepsilon)>0 \,;\, \forall n>\delta(\varepsilon),\ \forall z\in A : |f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$$

ومنه:

$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma (f_n(z)-f(z))\,dz\right| < \varepsilon\, l(\gamma)$$

حسب الخاصة الخامسة من خواص التكاملات العقدية.

نجعل $n\to\infty$ و $\varepsilon\to 0$ فنجد:

$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\to \int_\gamma f_n(z)\,dz \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\gamma f(z)$$

مبرهنة: بفرض $\{f_n(z)\}$ متتالية من التوابع التحليلية على المنطقة D والمتقاربة من $f(z)$ عندئذٍ $f(z)$ تابع تحليلي.

الإثبات:

بفرض γ منحني بسيط مغلق واقع في D عندئذٍ:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz = 0$$

لأنّ $f_n(z)$ تحليلي $\Leftarrow$ فحسب مبرهنة كوشي يكون $\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz=0$

وهو المطلوب حسب مبرهنة [إذا كان $\int_\gamma f(z)\,dz=0$ أيّاً كان γ منحني مغلق واقع في D فإنّ تحليلي.

مبرهنة: نفرض $\{f_n(z)\}$ متتالية من التوابع التحليلية على المنطقة D ومتقاربة من $f(z)$ عندئذٍ $\{f'_n(z)\}$ متقاربة من $f'(z)$.

الإثبات:

بما أنّ $\{f_n(z)\}$ متقاربة من $f(z)$ فإنّ:

$$\forall \varepsilon>0 : \exists \delta(\varepsilon)>0 ; \forall n>\delta(\varepsilon), \forall z\in A : |f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$$

ونفرض γ منحني دائرة مركزها a ونصف قطرها r واقعة في D

عندئذٍ:

$$|f'_n(z)-f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(z)}{(z-a)^2}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f_n(z)-f(z)}{(z-a)^2}\,dz\right| \underset{\text{حسب الخاصة}}{\leqslant} \frac{1}{2\pi}\,\frac{\varepsilon}{r^2}\,2\pi r$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{r}$$

وبجعل $n\to\infty$ و $\varepsilon\to 0$ نجد:

$$|f'_n(z)-f'(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \to f'_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(z)$$