بسم الله الرحمن الرحيم

* مثال :

ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية في جوار الصفر :

$$z^2(z^2-1)w'' + 2z^3 w' + b w = 0$$

في جوار الصفر :

$$w'' + \frac{2z^3}{z^2(z^2-1)} w' + \frac{b}{z^2(z^2-1)} w = 0$$

$$w'' + \frac{2z}{(z^2-1)} w' + \frac{6}{z^2(z^2-1)} w = 0$$

$z=0$ نقطة شاذة منتظمة.

$$a_1(z) = z\,a(z) = z \cdot \frac{2z}{(z^2-1)} = \frac{2z^2}{(z^2-1)}\Big|_{z=0} = 0 = a_1(0) = c_0$$

$$b_1(z) = z^2 b(z) = z^2 \frac{6}{z^2(z^2-1)} = \frac{6}{(z^2-1)}\Big|_{z=0} = -b = b_1(0) = d_0$$

$$\lambda(\lambda-1) + c_0\lambda + d_0 = 0$$

$$\lambda(\lambda-1) + 0\,\lambda + (-6) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2;\ \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$$

نفرض حلاً من الشكل :

$$w = \sum_{0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda}$$

$$z^0 : (\lambda-3) + (\lambda+2)c_0 \Rightarrow \lambda_1 = 3\ ,\ \lambda_2 = -2$$

$$z^1 : c_1 = 0$$

نفس المعادلة الدليلية

$$(n+\lambda-3)(n+\lambda+2)c_n - (n+\lambda-2)(n+\lambda-1)c_{n-2}\ ;\ n \geq 2$$

$$c_n = \frac{(n+\lambda-2)(n+\lambda-1)}{(n+\lambda-3)(n+\lambda+2)} c_{n-2}\ ;\ n \geq 2$$

$$n = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{\lambda(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+4)} c_0$$

$$n=3 \Rightarrow c_3=\frac{(1+\lambda)(2+\lambda)}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)} \quad c_1 \Rightarrow c_1=c_3=c_5=c_7=\cdots=0$$

$$n=4 \Rightarrow c_4=\frac{\lambda\cancel{(\lambda+1)}(\lambda+2)(\lambda+3)}{(\lambda-1)\cancel{(\lambda+1)}(\lambda+4)(\lambda+6)}c_0 \Rightarrow \lambda=3 \Rightarrow c_2=\frac{(3)(4)}{(2)(7)}c_0$$

$$\lambda=3 \Rightarrow c_4=\frac{3(5)(6)}{(2)(7)(9)}c_0 \; ; c_0=1$$

ونستمر هكذا ...

$$w=z^3\left[1+\frac{3.4}{2.7}z^2+\frac{3.5.6}{2.7.9}z^4+\cdots\right]$$

من أجل الجذر الثاني $\lambda_2=-2$

$$c_2=\frac{(-2)(-1)}{(-3)(2)} \; ; c_0=1$$

$$\lambda_2=-2 \Rightarrow c_4=0$$

$$c_5=0$$

$$\vdots$$

نستنتج الحل الثاني من الشكل $w_2=z^{-2}\left[1-\frac{z^2}{3}\right]$

حلان w_1 , w_2 مستقلان خطياً والحل العام هو تركيب خطي للحلين $w=Aw_1+Bw_2$

* في الطريقة السابقة الحالة الأولى أدت إلى الحالة الثانية.

* دراسة الحل في جوار اللانهاية:

« البحث في حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية في جوار اللانهاية »

« من أجل القيم الكبيرة لـ z »

- لتكن المعادلة التفاضلية الخطية التالية:

$$w''+a(z)w'+b(z)w=0 \qquad (1)$$

نجري التحويل:

$z=\frac{1}{t} \Rightarrow t=\frac{1}{z}$ ننتقل الجوار من ∞ إلى الصفر

ونبحث عن حل المعادلة الجديدة بجوار الصفر حيث نعوض كل t بقيمتها ونحصل على المطلوب.

/ / الموضوع : ....

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = \left(-t^2 \frac{dw}{dt}\right)$$

$$w'' = \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{dw'}{dz} = \frac{dw'}{dt}\frac{dt}{dz} = -t^2 \frac{dw'}{dt} = -t\left[-2t\frac{dw}{dt} - t^2\frac{d^2w}{dt^2}\right]$$

$$w'' = 2t^3\frac{dw}{dt} + t^4\frac{d^2w}{dt^2}$$

$$2t^3\frac{dw}{dt} + t^4\frac{d^2w}{dt^2} + a\left(\frac{1}{t}\right)\left(-t^2\frac{dw}{dt}\right) + b\left(\frac{1}{t}\right)w = 0$$

نرتب ونقسم

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{2t - a\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\frac{dw}{dt} + \frac{1}{t^4}b\left(\frac{1}{t}\right)w = 0 \qquad (2)$$

وهي المعادلة الجبرية لنظرية المشاريف،

$$\frac{2t - a\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \quad (3) \qquad \frac{1}{t^4}b\left(\frac{1}{t}\right) \quad (4)$$

ماهي طبيعة النقطة $t=0$ بالنسبة لكل من (3) و (4)

- الاحتمال الأول،

- $t=0$ تكون نقطة منتظمة عادية لكل من (3) و (4) فيكون لنا تحليل ويمكن كتابته على شكل سلسلة قوى غير منتهية

$$\frac{2t - a\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

$$a\left(\frac{1}{t}\right) = 2t - a_0 t^2 - a_1 t^3 - a_2 t^4 - a_3 t^5 - \cdots$$

$$a(z) = \frac{2}{z} - \frac{a_0}{z^2} - \frac{a_1}{z^3} - \frac{a_2}{z^4} - \frac{a_3}{z^5} - \cdots \quad (5)$$

$$z \cdot a(z) \xrightarrow[z \to \infty]{} 2 \qquad \text{(حصراً تساوي 2)} \qquad (6)$$

هذا من جهة

$$\frac{1}{t^4}b\left(\frac{1}{t}\right) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots$$

أريد أن أعزل $b\left(\frac{1}{t}\right)$

$$b\left(\frac{1}{t}\right) = t^4 b_0 + b_1 t^5 + b_2 t^6 + b_3 t^7 + b_4 t^8 + \cdots$$

نعوض بدلالة z

$$b(z)=\frac{b_0}{z^4}+\frac{b_1}{z^5}+\frac{b_2}{z^6}+\frac{b_3}{z^7}+\cdots \quad (7)$$

نعود إلى العقدي (2)

نقول عن النقطة $z=a$ إنها صفر للدالة $f(z)$ إذا كانت نظامياً في a وكان $f(a)=0$ «نظامي تحليلي ووحيد القيمة»

وإذا كانت $z=a$ صفر للدالة $f(z)$ من المرتبة k فإن $z=a$ هي قطب للدالة $\frac{1}{f(z)}$ من المرتبة k

*الخلاصة:

حتى تكون $t=0$ نقطة منتظمة يجب أن تتحقق لدينا الشروط 5, 6, 7 :

1- أي أن النقطة هي موضع صفري من المرتبة الأولى بالنسبة للدالة $a(z)$

2- موضع صفري في المرتبة الرابعة بالنسبة للدالة $b(z)$ على الأقل.

3- أن تتحقق شرط النهاية ~~[illegible]~~ $z\cdot a(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 2$

إذا تحققت هذه الشروط (5, 6, 7) سمي نقطة اللانهاية نقطة منتظمة ويكون حل على الشكل $w=\sum \frac{c_k}{z^k}$

- الاحتمال الثاني:

احتمال $t=0$ نقطة شاذة منتظمة ($z=\infty$)

$t=0$ قطب بسيط بالنسبة $a(z)$ على الأكثر عندئذٍ فإن z يكتب بالشكل:

$$\frac{2t-a\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}=\frac{a_0}{t}+ \text{تابع تحليلي}$$

$$\frac{2t-a\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}=\frac{a_0}{t}+a_1+a_2t+\cancel{\ \ }+a_3t^2+a_4t^3\cdots$$

$$a\left(\frac{1}{t}\right)=2t-a_0t-a_1t^2-a_2t^3-a_3t^4-\cdots$$

$$a(z)=\frac{a_0}{z}+\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z^3}+\frac{a_3}{z^4}+\cdots \quad (8)$$

إذا كان $t=0$ قطب ثنائي على الأكثر بالنسبة للدالة (b) عندئذٍ:

الموضوع: .... / /

$$\frac{1}{t^4} b\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{b_0}{t^2} + \frac{b_1}{t} + b_2 + b_3 t + \cdots$$

بنزل $b\left(\frac{1}{t}\right)$

$$b(z) = \frac{b_0}{z^2} + \frac{b_1}{z^3} + \frac{b_2}{z^4} + \frac{b_3}{z^5} + \cdots$$

$t=0$ $z=\infty$ شاذة منتظمة

نستنتج أنه حتى يكون ($z=\infty$) نقطة اللانهاية منتظمة:

1- أن تكون $z=\infty$ صفر من المرتبة الأولى بالنسبة $a(z)$ على الأقل

2- أن تكون $z=\infty$ صفر من المرتبة الثانية بالنسبة لـ $b(z)$ على الأقل

عندئذ يكون شكل الحل بجوار اللانهاية:

$$w = \sum c_k t^{k+\lambda} \quad ; c_0 \neq 0$$

$$w = \frac{1}{z^\lambda} \sum_{0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}$$

إذا اختل أحد الشرطين نسمي $z=\infty$ نقطة شاذة غير منتظمة:

* لنبدأ بحل التمارين:

ما هي طبيعة النقاط الشاذة للمعادلات التالية:

$$w'' + \frac{2(z+2)}{z(z-2)} w' + \frac{5}{z^2(z-2)} w = 0$$

$z=0$ نقطة شاذة منتظمة

$z=2$ نقطة شاذة منتظمة

في اللانهاية $z\, a(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 2$

والشرط الأول محقق.

② إذاً $z=\infty$ هي صفر من المرتبة الأولى بالنسبة للدالة $a(z)$

③ إذاً $z=\infty$ هي صفر من المرتبة الرابعة بالنسبة للدالة $b(z)$

* كيف نعلم من أي مرتبة الصفر؟

نطرح درجة البسط من درجة المقام وناتج الطرح يكون مرتبة الصفر.

* أكد على السؤال من أجل:

$$z^2(z-2)^2 w'' + a(z)(z^2-4)w' + (z-1)w = 0$$

نقسم على أمثال w''

$$w'' + \frac{az(z^2-4)}{z^2(z-2)^2} w' + \frac{(z-1)}{z^2(z-2)^2} w = 0$$

هي شاذة منتظمة لأنها صفر من المرتبة الأولى بالنسبة لـ $a(z)$ وصفر من مرتبة الثالثة بالنسبة لـ $b(z)$ فهي شاذة منتظمة

$$w'' + \frac{a(z+2)}{z(z-2)} w' + \frac{(z-1)}{z^2(z-2)^2} w = 0$$

* مثال

ابحث في حل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(1-z^2)w'' - 2zw' + bw = 0$$

في جوار اللانهاية

نجري التحويل $z = \frac{1}{t}$

$$w' = \frac{dw}{dt} = -t \frac{dw}{dt}$$

$$w'' = 2t^3 \frac{dw}{dt} + t^4 \frac{d^2w}{dt^2}$$

نعوض في المعادلة

$$\left(1-\frac{1}{t^2}\right)2t^3 \frac{dw}{dt} + t^4 \frac{d^2w}{dt^2} - 2\frac{1}{t}\left[-t^2 \frac{dw}{dt}\right] + bw = 0$$

نرتب ونوحد المقامات

$$t^2(t^2-1)\frac{d^2w}{dt^2} + 2t^3\frac{dw}{dt} + bw = 0$$

وهي نفس المعادلة التي درسناها في بداية المحاضرة.

نبحث عن حل من الشكل:

$$w = \sum c_k t^{k+1}$$

$t=0$ نقطة شاذة منتظمة.

$z=\infty$ نقطة شاذة منتظمة

$$w = \sum \frac{c_k}{z^k}$$

طريقة ثانية

نبحث عن حل من الشكل ~~[illegible]~~

بالاشتقاق والتعويض والمطابقة

$$w_1 = \sum_{0}^{\infty} c_k z^{-(k+1)}$$

* وظيفة:

اعد حل التمارين المعطاة بالورقة السابقة في جوار اللانهاية بما يتعلق بالنقط الشاذة بالإضافة لذلك،

ما هي النقاط الشاذة لهذه المعادلات وما طبيعة كل منها ثم أوجد الحل العام بجوار جميع النقاط

1] - $z^2 w'' + 2z(z-2)w' + 2(2-3z)w = 0$

2] - $z^4 w'' + z(1+2z^2)w' + 5w = 0$

3] - $2z^2(z-1)w'' + z(5z-3)w' + (z+1)w = 0$

4] - $4z^3 w'' + 6zw' + w = 0$

5] - $2z(z+1)w'' + 3(z+1)w' - w = 0$

6] - $(z-1)^2 w'' - (z^2-z)w' + w = 0$

7] - $z^2 w'' + zw' + (z^2 - \frac{1}{9})w = 0$

8] - $z^2 w'' + zw' + (z^2 - \frac{1}{4})w = 0$

انقة الماهرة،

Yenia.D