المحاضرة الرابعة الخميس 27/3/2014

الموضوع: خواص الدوال ذات التغير المحدود.

1 إذا كانت f د.ت.م على $[a,b]$ فإنها محدودة ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

2 إذا كانت f د.ت.م على $[a,b]$ فإن:

I $|f(x)|$ د.ت.م على $[a,b]$.

II αf د.ت.م على $[a,b]$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

III $\frac{1}{f}$ د.ت.م على $[a,b]$ حيث $f \neq 0$ ، $0 < c \leqslant |f|$

3 إذا كانت f و g دالتين كل منهما د.ت.م على $[a,b]$ فإن $(f \mp g)$ و $(f \cdot g)$ و $\frac{f}{g}$ د.ت.م على $[a,b]$ حيث $|g| \geq c' > 0$ و $g \neq 0$

نتيجة: إذا كانت f د.ت.م فإن f^k د.ت.م.

إذا كانت f د.ت.م فإن $\frac{1}{f^k}$ حيث $k \geqslant 2$ و $k \in \mathbb{N}$ (عدد ثابت)

تكون د.ت.م حيث $f \neq 0$

4 إذا كانت f د.ت.م على $[a,b]$ وكانت $a < c < b$ فإن f د.ت.م على $[a,c]$ و $[c,b]$ وبالعكس، كما أن:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$$

نتيجة: f د.ت.م على $[a,b]$ وكانت:

$a < c_1 < c_2 < \ldots\ldots < c_n < b$ فإن:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c_1}{\underset{a}{V}} f + \overset{c_2}{\underset{c_1}{V}} f + \ldots\ldots + \overset{b}{\underset{c_n}{V}} f$$

مثال:

إذا كانت f معرفة على المجال $[0,1]$ كما يلي:

تذكرة: (*) $||a|-|b|| \leq |a-b|$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \; x \in Q \\ -1 & ; \; x \notin Q \end{cases}$$

والمطلوب:

بين فيما إذا كانت $|f|$ د.ت.م ولكن f ليست د.ت.م.

إثبات المبرهنة رقم (2):

I) : f د.ت.م على $[a,b]$ $\Leftarrow$ $|f|$ د.ت.م على $[a,b]$.

البرهان: لنأخذ التجزئة: $P \in \mathbb{P}[a,b]$

$$P = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots\dots < x_n = b \}$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} |f| = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} ||f(x_k)| - |f(x_{k-1})||$$

بالاستفادة من التذكرة (*)

$$\leq \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \overset{b}{\underset{a}{V}} f < +\infty$$

$$\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} |f| < \infty$$

إذاً $|f|$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

II)

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} (\alpha f) = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |\alpha f(x_k) - \alpha f(x_{k-1})|$$

$$= \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} \left[|\alpha| \, | f(x_k) - f(x_{k-1}) \right]$$

** $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

*** $|a-b| = |b-a|$

* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ من خواص القيمة المطلقة

بالاستعانة من **

$$= |\alpha| \sup_{P\in\mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= |\alpha| \bigvee_a^b f < \infty$$

إذاً (αf) د.ت.م على $[a,b]$

III)

$$\bigvee_a^b \frac{1}{f} = \sup_{P\in\mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})} \right|$$

بالاستعانة من خواص القيمة المطلقة

$$= \sup \sum \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|f(x_k)||f(x_{k-1})|}$$

وبما أنّ:

$$f \neq 0 \Rightarrow |f| > 0$$

$$\forall x \in [a,b]: \quad 0 < c \leq |f(x)|$$

$$\Rightarrow \forall x \in [a,b]: \quad \frac{1}{c} \geq \frac{1}{|f(x)|}$$

$$\Rightarrow \bigvee_a^b \frac{1}{f} \leq \frac{1}{c^2} \sup_{P\in\mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\Rightarrow \bigvee_a^b \frac{1}{f} \leq \frac{1}{c^2} \bigvee_a^b f < \infty$$

$\Leftarrow \frac{1}{f}$ د.ت.م على $[a,b]$

وهو المطلوب

إثبات المبرهنة رقم $\boxed{3}$:

لنضع

$$\psi(x) = (f \mp g)(x) = f(x) \mp g(x)$$

ولنأخذ التجزئة:

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n = b\}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b$$

وحسب التعريف يكون:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} \psi = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |\psi(x_k) - \psi(x_{k-1})|$$

$$= \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) \mp g(x_k) - f(x_{k-1}) \pm g(x_{k-1})|$$

$$= \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |(f(x_k) - f(x_{k-1})) \mp (g(x_k) - g(x_{k-1}))|$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} (f \mp g) \leq \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| +$$

$$\sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

$$\rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} (f \mp g) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{a}{V}} g < \infty$$

إذاً $f \mp g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

$$|a \mp b| \leq |a| + |b|$$

ملحوظة هامة

من أجل $(f.g)$:

الإثبات: نضع

$$\psi(x) = (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

لنضع التجزئة: $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b\}$

وبالتالي يكون حسب التعريف:

$$\bigvee_a^b \psi = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |\psi(x_k) - \psi(x_{k-1})|$$

$$\bigvee_a^b (f.g) = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k).f(g_k) - f(x_{k-1}).g(x_{k-1})|$$

$$= \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k).g(x_k) - f(x_{k-1}).g(x_k) + f(x_{k-1}).g(x_k) - f(x_{k-1}).g(x_{k-1})|$$

$$= \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} \left[|g(x_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})) + f(x_{k-1})(g(x_k) - g(x_{k-1}))| \right]$$

$$\leq \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} \left[|g(x_k)|.|f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_{k-1})||g(x_k) - g(x_{k-1})| \right]$$

وبما أن f دالة محدودة على $[a,b]$ فإنه:

$$\exists A > 0 \; ; \; |f(x)| \leq A : \forall x \in [a,b]$$

وبما أن g دالة محدودة على $[a,b]$ فإنه:

$$\exists B > 0 \; ; \; |g(x)| \leq B : \forall x \in [a,b]$$

وبالتالي نجد:

$$\rightarrow \bigvee_a^b (f.g) \leq B \sup_{P\in\mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})| + A \sup_{P\in\mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |g(x_k)-g(x_{k-1})|$$

$$\rightarrow \bigvee_a^b (f.g) \leq B \bigvee_a^b f + A \bigvee_a^b g < +\infty$$

إذاً $(f.g)$ دالّة ذات تغير محدود على $[a,b]$

من $\left(\frac{f}{g}\right)$:

الإثبات: إذاً f د.ت.م على $[a,b]$

و $g\neq 0$ ، $\frac{1}{g}$ د.ت.م على $[a,b]$

$$\rightarrow f.\frac{1}{g} = \frac{f}{g}$$

وهي دالّة ذات تغير محدود على $[a,b]$.

إثبات المبرهنة رقم $\boxed{4}$:

البرهان: بما أنّ f د.ت.م على $[a,b]$ فهي د.ت.م على أي مجال جزئي مغلق منه وبالتالي f د.ت.م على $[a,c]$ و $[c,b]$.

• f د.ت.م على $[a,c]$:

لنأخذ التجزئة: $P_1 = \{a\ u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n = c\}$

• f د.ت.م على $[c,b]$:

لنأخذ التجزئة:

$P_2 = \{c = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m = b\}$

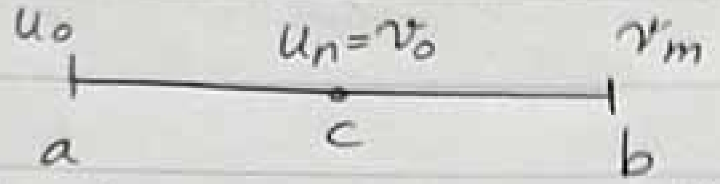
لنأخذ التجزئة:

$$P = P_1 \cup P_2 = \{a, \ldots, b\}$$

$$\Rightarrow V(f,P) = V(f,P_1) + V(f,P_2)$$

$$- V(f,P_1) = \sum_{k=1}^{n} |f(u_k) - f(u_{k-1})|$$

$$- V(f,P_2) = \sum_{k=1}^{m} |f(v_k) - f(v_{k-1})|$$



ولدينا :
$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \geq V(f,P) = V(f,P_1) + V(f,P_2)$$

$$\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f \geq \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f \quad \dots 1$$

وبالعكس لدينا :

f د.ت.م على $[a,c]$
f د.ت.م على $[c,b]$
$\Leftarrow$ f د.ت.م على $[a,b]$

لنأخذ التجزئة :
$$P \in \mathcal{P}[a,b]$$
$$P = P_1 \cup P_2 \setminus \{c\} \quad \wedge \quad P' = P_1 \cup P_2$$

$$\Rightarrow V(f,P) \leq V(f,P') = V(f,P_1) + V(f,P_2)$$
(تجزئة أدق)

وبأخذ sup للطرفين نجد :
$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \leq \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f < \infty \quad \dots 2$$

إذاً f د.ت.م على $[a,b]$

من 1 و 2 نستنتج أنّ :
$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$$