المحاضرة الثانية — الثلاثاء: 11/3/2014

## تكامل تابع عقدي:

نميز حالتين:

### 1- تكامل تابع عقدي بمتحول حقيقي:

بفرض $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ تابع عقدي بمتحول حقيقي

$$t\longmapsto f(t)=u(t)+iv(t)$$

عندئذٍ $f$ قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان $u(t)$, $v(t)$ قابلين للمكاملة على $[a,b]$ ويكون:

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+i\int_a^b v(t)\,dt$$

تمرين: احسب التكامل:

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} e^{it}\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos t\,dt+i\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin t\,dt$$

$$=\Big[\sin t\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+i\Big[-\cos t\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)(1+i)$$

### 2- تكامل تابع عقدي بمتحول عقدي:

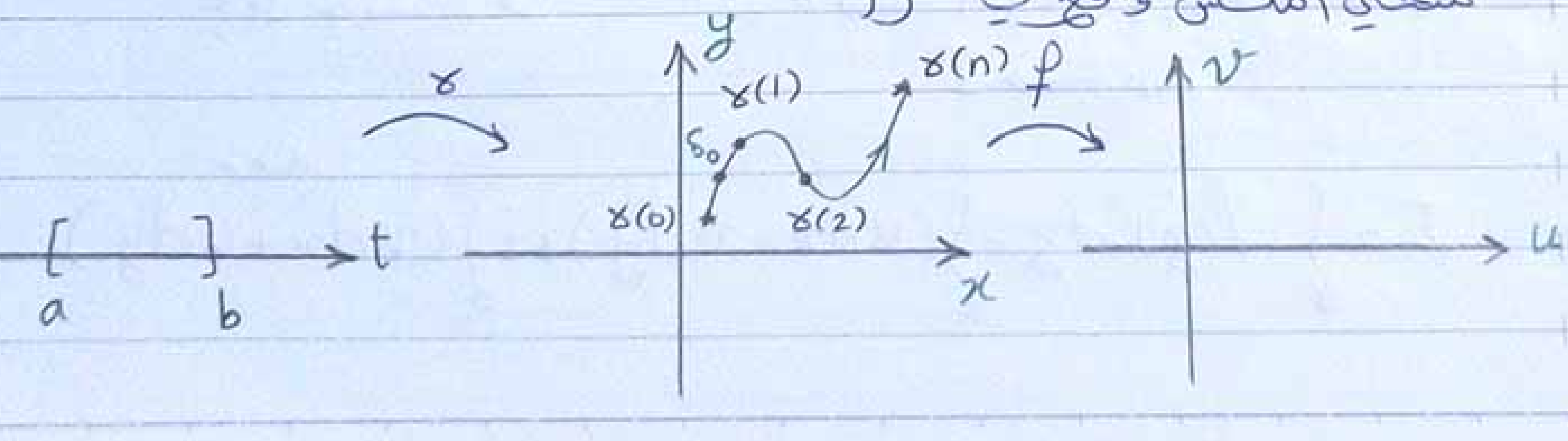
بفرض $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابع عقدي مستمر على منطقة $D$ [مجموعة مفتوحة ومترابطة]

وبفرض:

$$\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$$

$$t\longmapsto\gamma(t)=x(t)+iy(t)$$

منحني أملس واقع في $D$



نقوم بتجزئة المجال $[a,b]$ كما يلي:

$$a = t_0 < t_1 < \dots\dots < t_n = b$$

ولنضع: $\gamma_k = \gamma(t_k)$ ; $k = 0, 1, \dots, n$

فنحصل على تجزئة للمنحني $\gamma$

نختار $\delta_k$ نقطة اختيارية من القوس $\overset{\frown}{\gamma_k \gamma_{k+1}}$ ولنشكل المجموع:

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\delta_k)(\gamma_{k+1} - \gamma_k)$$

نجعل $n$ تسعى إلى اللانهاية،

وطول كل مجال جزئي $[t_k, t_{k+1}]$ يسعى نحو الصفر، فإذا كانت نهاية المتتالية $I_n$ موجودة وتساوي $I$ فإننا نسمي $I$ بتكامل التابع العقدي $f(z)$ على المنحني $\gamma$ ونكتب:

$$I = \int_\gamma f(z)\, dz$$

نضع: $\delta_k = \alpha_k + i\beta_k$ ، $\gamma_k = x_k + iy_k$ ، $u_k = u(\alpha_k, \beta_k)$
$v_k = v(\alpha_k, \beta_k)$ ، $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ، $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$

عندئذٍ:

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\delta_k)(\gamma_{k+1} - \gamma_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=0}^{n-1} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k)$$

نجعل $n \to \infty$ و $\forall k : |\gamma_{k+1} - \gamma_k| \to 0$ عندئذٍ:

$$I_n \longrightarrow I$$

ومنه:

$$I = \int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy)$$

حيث $\begin{cases} dx = x'(t)\,dt \\ dy = y'(t)\,dt \end{cases}$ ومنه :

$$I = \int_a^b (ux' - vy')\,dt + i\int_a^b (vx' + uy')\,dt$$

$$= \int_a^b (u+iv)(x'+iy')\,dt$$

ومنه :

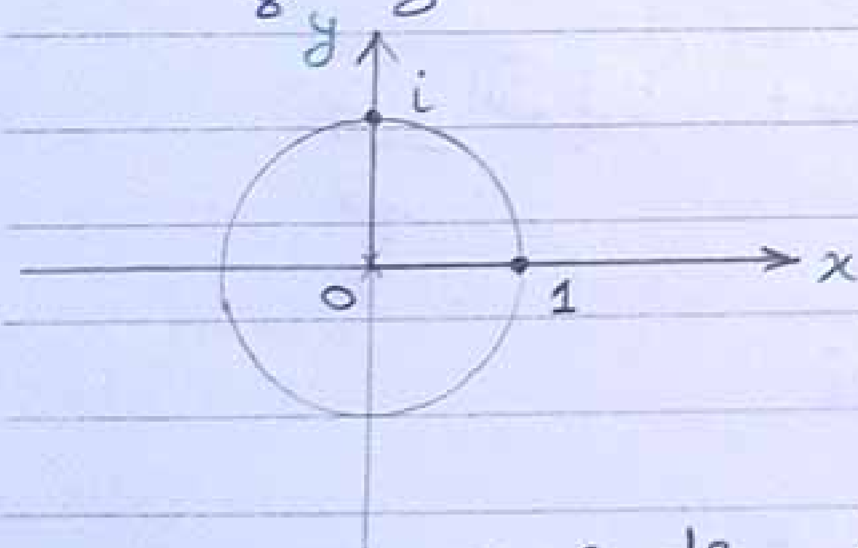
$$I = \int_\gamma f(z)\,dz$$

$$\boxed{I = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt}$$ للحفظ

وهو القانون المباشر لحساب التكاملات العقدية.

تمرين تعليمي : احسب التكاملات العقدية التالية:

$\boxed{1}$ $I = \int_\gamma \frac{dz}{z}$ ; $\gamma(t) = e^{it}$ ; $t \in [0, 2\pi]$




الحل. نلاحظ أنّ $\gamma$ منحني دائرة الواحدة موجهة بالاتجاه الموجب ممسوحة مرة واحدة.

نضع $f(z) = \frac{1}{z}$

فنلاحظ أنّ $f(z)$ تابع عقدي مستمر على $\mathbb{C}^*$

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

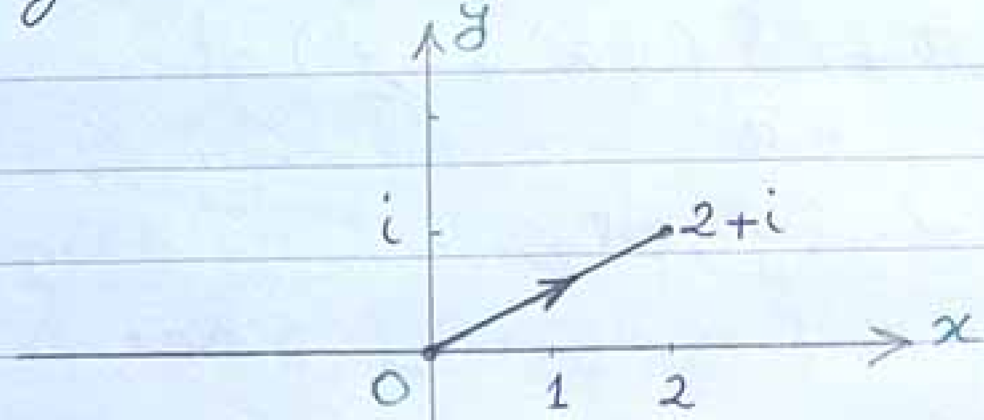
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)}\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\, i e^{it}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i\,dt = [\,it\,]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

$\boxed{2}$ $I = \int_{\gamma} z\,dz \;;\; \gamma(t) = 2t + it \;;\; t \in [0,1]$

الحل :

$$\left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = t \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$




$$I = \int_{\gamma} z\,dz = \int_0^1 \gamma(t)\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (2t+it)\underbrace{(2+i)}\,dt = \frac{3}{2} + 2i$$

ثابت يمكن إخراجه خارج إشارة التكامل.

طريقة ثانية : نفرض أن $z = x + iy$ فيكون :

$$dz = dx + i\,dy$$

نعوض فنجد :

$$I = \int_{\gamma} z\,dz$$

$$= \int_{\gamma} (x+iy)(dx + i\,dy)$$

يجري التحويل : $x = x(t) = 2t,\; y = y(t) = t$

فنجد :

$$I = \int_0^1 (2t+it)(2\,dt + i\,dt)$$

$$= \int_0^1 (2t+it)(2+i)\,dt = \frac{3}{2} + 2i$$

وظيفة : أعد حل التمرين $\boxed{2}$ من أجل :

$$\gamma_1(t) = 2t^2 + it \;;\; t \in [0,1]$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2t^2 \\ y = t \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2y^2$$

وماذا تستنتج ؟

الحامل جزء من قطع مكافئ.