$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$ المجموع الجزئي للمتسلسلة الهندسية

2/4/2014 الأربعاء المحاضرة التاسعة

مبرهنة تايلور: [متسلسلة تايلور في جوار النقطة a (حول النقطة a)]:

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي على القرص $D(a,r)$ عندئذٍ يمكن نشر التابع $f(z)$ في D على شكل متسلسلة قوى من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

حيث نسمي هذه المتسلسلة بمتسلسلة تايلور للتابع $f(z)$ عند النقطة a.

الإثبات:

بفرض γ_1 منحني دائرة مركزها a ونصف قطرها r_1 حيث $r_1<r$ وبفرض w نقطة واقعة على γ_1 و z نقطة أخرى واقعة داخل γ_1 عندئذٍ من أجل $n\in\mathbb{N}^*$ يكون:

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}=\frac{1}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{w-a}\right)}$$

$$=\frac{1}{w-a}\left[1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n+\frac{\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{z-a}{w-a}\right)}\right]$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{1}{2\pi i}f(w)$ ثم نكامل على γ_1 فنجد:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-a}dw+\frac{z-a}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-a)^2}dw$$

$$+\cdots\cdots+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw+\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n+1}\frac{f(w)}{(w-a)-(z-a)}dw}_{R_{n+1}}$$

بما أنّ $f(w)$ تحليلي على D فهو مستمر على D وبالتالي محدود على D

أي:

$$\exists M>0\ ;\ \forall w\in D: |f(w)|\leq M$$

كذلك:

حسب خاصية [illegible] الأعداد [illegible]
$|a-b| \geq ||a|-|b||$

$$\left| \frac{1}{(w-a)-(z-a)} \right| \leq \frac{1}{r_1 - |z-a|}$$

ولدينا أيضاً: z داخل المنحني [illegible]

$$\left| \frac{z-a}{w-a} \right| = k < 1$$

ومنه:

$$|R_{n+1}| \leq \frac{1}{\cancel{2\pi}} k^{n+1} \frac{M}{r_1 - |z-a|} \cdot \cancel{2\pi} r_1$$

$$= \frac{M \cdot r_1}{r_1 - |z-a|} \cdot k^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

k أصغر من الواحد

ومنه عندما نجعل $n \to \infty$:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \dots\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots\dots$$

ملاحظة: إذا كانت $a = 0$ عندئذٍ تصبح المتسلسلة من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

حفظ

حيث نسمي هذه المتسلسلة بمتسلسلة ماك لوران للتابع $f(z)$.

تمرين: أوجد متسلسلة ماك لوران للتوابع التالية:

لو كان $-z$ نبدل كل z ب $-z$

$\boxed{1}$ $f(z) = e^z$

(تحليلي على $\mathbb{C}$)

الحل: نلاحظ أنه:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z) = e^z$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(0) = 1$$

ومنه:

$$f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots\dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$\boxed{2}$ $f(z) = \cos z$

الحل: نلاحظ أنّ:

$$f(z) = \cos z \to f(0) = 1 \quad , f'(z) = -\sin z \to f'(0) = 0$$

$$f''(z) = -\cos z \to f''(0) = -1 , \ f'''(z) = \sin z \to f'''(0) = 0$$

$\vdots$

$$f(z) = \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}$$

في هذا المثال لا توجد متتالية أمثال لأنه يوجد حدود معدومة، ولو كان z^n لكانت متتالية الأمثال هي $\frac{(-1)^n}{2n!}$

(يمكن فقط هنا تطبيق نفس قطر التقارب)

$\boxed{3}$ $f(z) = ch z$

(تابع عقدي قطعي)

الحل: نلاحظ أنّ:

$$f(z) = ch z \to f(0) = 1$$

$$f'(z) = sh z \to f'(0) = 0$$

$$f''(z) = ch z \to f''(0) = 1$$

$$f'''(z) = sh z \to f'''(0) = 0$$

$\vdots$

تذكرة:

$$ch z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$sh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

ومنه:

$$f(z) = ch z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!}$$

$\boxed{4}$ $f(z) = \ln(1+z)$

الحل: نلاحظ أنّ:

$$f(z) = \ln(1+z) \to f(0) = 0$$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \to f'(0) = 1$$

$$f''(z) = \frac{-1}{(1+z)^2} \to f''(0) = -1$$

$$f'''(z) = \frac{2}{(1+z)^3} \to f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(z) = \frac{-3(1+z)^2 \cdot 2}{(1+z)^6} = \frac{-3 \cdot 2}{(1+z)^4} \rightarrow f^{(4)}(0) = -3 \cdot 2$$

ومنه :

$$f(z) = 0 + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

طريقة ثانية :

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \cdots$$

بمكاملة الطرفين :

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

وظيفة : أوجد منشور ماك لوران للتوابع التالية :

$\boxed{1}$ $f(z) = \sin z$ (حل بطريقتين)

$\boxed{2}$ $f(z) = \operatorname{sh} z$ (حل بطريقتين)

$\boxed{3}$ $f(z) = \dfrac{1}{i-z} \longrightarrow$ نخرج عامل مشترك $= \dfrac{1}{i} \dfrac{1}{1-\frac{z}{i}}$