الحالة السابقة ٢ / ٤ / ٢٠١٤

أوضاع مستقيمين :

$\overrightarrow{XL_1} = \overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{u} \; : \lambda \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{XL_2} = \overrightarrow{OM_2} + \mu\overrightarrow{v} \; : \mu \in \mathbb{R}$

أي دراسة الوضع بين المستقيمين $\overrightarrow{XL_1} , \overrightarrow{XL_2}$

$\overrightarrow{XL_1} = \overrightarrow{XL_2}$

$\overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM_2} + \mu\overrightarrow{v} \Rightarrow \lambda\overrightarrow{u} - \mu\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$

$\lambda(-,-,-) - \mu(-,-,-) = (x,x,x)$

وتمثل ثلاث معادلات بمجهولين هي λ , μ وتحل عن طريق غاوس:

نحول هذه المصفوفة الى مصفوفة مدرجة مختزلة

$$\left(\begin{array}{cc|c} - & - & x \\ - & - & x \\ - & - & x \end{array}\right)$$

حيث r: عدد الأسطر الغير صفرية في مصفوفة الأمثال

r': عدد الأسطر الغير صفرية في المصفوفة المدرجة المختزلة

n: عدد المجاهيل ودائماً ما تكون $\boxed{n=2}$

اذا كانت : $r \neq r'$ فهي حالة توازي أو تخالف ((أي مستحيلة الحل)) ويتم التمييز حسب أشعة التوجيه اذا كان $\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{u}$ فإنه حالة توازي أما اذا كانت $\overrightarrow{u} \nparallel \overrightarrow{v}$ فهي حالة تخالف

$n = r' = r$ حل وحيد تقابل المستقيمين متقاطعين في نقطة واحدة.

$n \neq r' = r$ فهي حالة انطباق.

مثال : ادرس وضع المستقيمين

$\overrightarrow{XL_1} = (1,1,0) + \lambda(2,1,1) \; : \lambda , \mu \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{XL_2} = (2,0,2) + \mu(1,-1,2)$

$\lambda(2,1,1) - \mu(1,-1,2) = (2,0,2) - (1,1,0)$

$\lambda(2,1,1) - \mu(-1,1,-2) = (1,-1,2) \Longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda - \mu &= 1 \\ \lambda + \mu &= -1 \\ \lambda - 2\mu &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r = 2 \; , \; r' = 2 \; , \; n = 2 \Leftarrow$ المستقيمين متقاطعين في نقطة

ومنه $\lambda = 0 \; , \; \mu = -1 \Leftarrow$ نعوض $\lambda = 0$ نقطة التقاطع هي

$P(1,1,0)$.

الزاوية بين مستقيمين متقاطعين في نقطة واحدة:

هي الزاوية بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ الأشعة التوجيه.

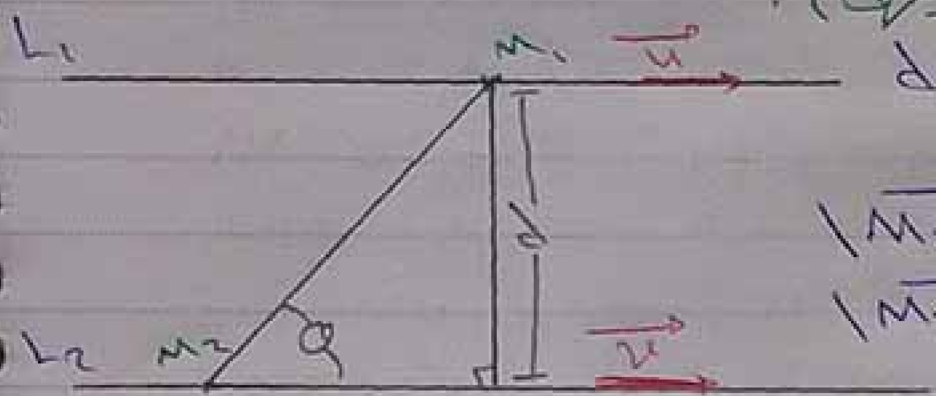
$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

وظيفة:

أحسب الزاوية بين $\vec{X}_{L_1}$ ، $\vec{X}_{L_2}$ في التمرين السابق.

$$\cos\theta = \frac{2-1+2}{\sqrt{4+1+1}\,\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{2\sqrt3} = \frac{\sqrt3}{2}$$

- البعد بين مستقيمين (أقصر بعد بينهما):



1- منطبقين أو متقاطعين $d = 0$

2- متوازيين:

$$|\vec{M_2M_1}\wedge\vec{v}| = |\vec{M_2M_1}|\cdot|\vec{v}|\,\sin\theta$$

$$|\vec{M_2M_1}\wedge\vec{v}| = |\vec{v}|\,d$$

$$\Rightarrow d = \frac{|\vec{M_2M_1}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

مثال:

ادرس الوضع بين المستقيمين $\vec{X}_{L_1}$ ، $\vec{X}_{L_2}$ واحسب البعد بينهما:

$$\vec{X}_{L_1} = (1,1,4) + \lambda(1,1,1) : \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\vec{X}_{L_2} = (3,0,1) + \mu(2,2,2) : \mu\in\mathbb{R}$$

$$\vec{X}_{L_1} = \vec{X}_{L_2} \Rightarrow \lambda(1,1,1) + \mu(-2,-2,-2) = (2,-1,-3)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{المختزلة}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad r \neq r' \Leftarrow \begin{cases} r = 1 \\ r' = 2 \\ n = 2 \end{cases}$$

اما تخالف أو توازي، لمعرفة ما اذا كان تخالف أم توازي نجد أن

إذاً توازي L_2 $\quad (1,1,1) = 2(1,1,1) \Leftarrow (1,1,1) \parallel (2,2,2)$

$$d = \frac{|\vec{M_2M_1}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|} \; ; \quad \vec{M_1M_2} = (-2,1,3)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt3$$

$$|\vec{M_2M_1}\wedge\vec{v}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (*, **, ***) \Rightarrow d = \frac{\sqrt{*^2 + **^2 + ***^2}}{2\sqrt3}$$