بسم الله الرحمن الرحيم

* مبدأ الاستقراء:

إذا كانت P_n معرفة من أجل $n \geq n_0$ نصحح خطوة البداية بالشكل:

نثبت صحة P_n من أجل $n=n_0$

- خطوة الاستقراء: نفرض صحة P_n من أجل k تحقق $k \geq n$ ثم نثبت صحتها من أجل $n=k+1$

مثال:

$\sum i^2 = 1^2+2^2+\dots+n^2$ احسب $\sum_{1}, \sum_{2}, \sum_{3}, \sum_{4}$

$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1$, $\sum_{i=1}^{2} i^2 = 1+4=5$, $\sum_{i=1}^{3} i^3 = 1+4+9=14$, $\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1+4+9+16=30$

اثبت بالاستقراء أن:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

خطوة البداية:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1.2.3}{6} = 1$$

خطوة الاستقراء: نفرضها صحيحة من أجل $n=k$

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

ونبرهن صحتها من أجل $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+\overset{2((k+1)+1)}{3})}{6}$$

محققة من أجل $n=k+1$ وبالتالي هي صحيحة من أجل $n \geq 1$

* قابلية القسمة

نقول أن العدد a يقسم العدد b إذا وجد عدداً c بحيث يكون $b=c.a$ (نقول أن a قاسم لـ b) (b مضاعف لـ a) ونكتب $a|b$ أو $a|b$ (a/b فقط) ضمن B $\frac{a}{b}$

وإذا كان a لا يقسم b نكتب $a \nmid b$

*خواص:

1. العدد 1 يقسم كل الأعداد و الصفر مضاعف لكل الأعداد 2. إذا كان $a|b$ فإن $a|-b$
3. إذا كان $a|b$ فإن $a|kb$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ 4. إذا كان $a|b$ و $b|c$ $\Rightarrow$ $a|c$
5. كل عدد يقسم نفسه أي $a|a$ 6. إذا كان $d|a$ و $d|b$ فإن d يقسم كل تركيب خطي لهما

مثال: $d \mid (an+bm)$

7. إذا كان $a|c$ فإن $|a| \leq |c|$ 8. إذا كان $a|c$ و $c|a$ $\Rightarrow$ $a=c$

$|a| \leq |c|$, $|c| \leq |a|$ $\Rightarrow$ $|a| = |c|$

*مبرهنة إقليدس:

ليكن a,b عددان صحيحان غير معدومان مما يعني أنه يوجد عددان صحيحان q,r وحيدان بحيث يكون

$$b = aq + r \quad ; \quad 0 \leq r \leq |a|$$

الإثبات: نأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة التالية:

$$S = \{x \geq 0 \; ; \; x = b - at \; ; \; t \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$$

يوجد في S عنصر أصغري ولكنه r والقيمة الموافقة له $t=q$

$$r = b - q \cdot a \quad ; \quad r \geq 0$$

لنثبت أن $r < |a|$ لنفرض أن $r \geq |a| \Rightarrow r - |a| \geq 0$

- إذا كانت a موجبة: $r - a = b - q \cdot a - a = b - a(q-1) \in S$
- إذا كانت a سالبة: $r + a = b - qa + a = b - a(q-1) \in S$

لدينا $r - |a|$ عنصر من S وهو أصغر من r وهذا يناقض كون r عنصر أصغر إذاً الفرض الجدلي خاطئ ولكنه هو $r < |a|$ لنفرض أن r,q وحيدان نفرض أنه يوجد عددان r, r_1, q, q_1

$$b = aq + r \; ; \; 0 \leq r < |a| \quad , \quad b = aq_1 + r_1 \; ; \; 0 \leq r_1 \leq |a|$$

$$aq + r = aq_1 + r_1 \Rightarrow a(q - q_1) = r_1 - r$$

$r_1 - r$ هو مضاعف لـ a وهو أصغر من $|a|$ أي أن $r_1 - r = 0 \Rightarrow r_1 = r \Rightarrow q = q_1$

*مثال:

مربع عدد فردي يزيد بالواحد عن مضاعفات الـ 8 لأي عدد فردي $\Rightarrow b^2 = 8m + 1$

كل عدد فردي يكتب بالشكل $b = 2k + 1 \Rightarrow b^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

الموضوع: ....

$\Rightarrow b^2 = 4k(k+1)+1 \Rightarrow 4\cdot 2m+1 = 8m+1$

حيث $k(k+1) = 2m$ (لأن عددان متتاليان احدهما زوجي والآخر فردي)

مثال: اثبت أن $14 \mid 5^{2n+1} + 3^{4n+2} = f_n \; ; \; n \geq 0$

خطوة البداية: $n=0 \Leftarrow$ $f(1) = 5 + 3^2 = 14$

$f(1) = 5^3 + 6^6 = 125 + 729 = 854 = 14 \times 61$

محققة $14 \mid f(1)$. لدينا كل عدد يكتب بالشكل $N = a + 10b$

قابلية القسمة على 14

لكن لدينا العدد 854 ،

والـ 77 تقبل

98 | 2, −4, 9 | 4, −8, 1 لا يقبل

85 | 4, −8, 77

القسمة على 7 وعلماً أن 854 عدد زوجي فهو يقبل القسمة على 14 القسمة على 14

- إذا كان $2a - b$ يقبل القسمة على 7 فإن N يقبل القسمة على 7

خطوة الاستقراء: نفرض صحة العلاقة من أجل $n = k$

$14 \mid f(k) = 5^{2k+1} + 3^{4k+2} = 14\cdot m$

لنبرهن صحتها من أجل $n = k+1$

$f(k+1) = 5^{2k+3} + 3^{4k+6} = 5^2 \cdot 5^{2k+1} + 3^{4k+2} \cdot 3^4$

$3^4 = 81 = 5^2 + 56 = 5^2 + 14 \times 4$

$f(k+1) = 5^2 \cdot 5^{2k+1} + 3^{4k+2}(5^2 + 14 \times 4)$

$f(k+1) = 5^2 f(k) + 14 \times 3^{4k+2}$

$f(k+1) = 14(5^2 \cdot m + 4\cdot 3^{4k+2})$

$14 \mid f(k+1)$

فهي محققة من أجل $n = k+1$ وبالتالي محققة من أجل $n \geq 0$

انتهت المحاضرة،

Yehia. D