المحاضرة الخامسة

مبرهنة: لتكن $A \subset \mathbb{R}^2$ ، إن A مغلقة $\Longleftrightarrow A' \subset A$

الإثبات: $(\Longleftarrow)$ لتكن $x \in A'$ ولنفرض جدلاً أن $x \notin A$

وبالتالي $x \in A^c$ وهي مفتوحة في $\mathbb{R}^2$ فرضاً وبالتالي

$$\exists r > 0 : D_x(r) \subset A^c$$

$$\Rightarrow \exists r > 0 : D_x(r) \cap A = \phi$$

$$\Rightarrow \exists r > 0 : D_x(r) \cap A \setminus \{x\} = \phi \qquad (x \notin A)$$

$$\Rightarrow x \notin A' \quad (\text{تناقض})$$

ومنه الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي $x \in A \Leftarrow A' \subset A$

$(\Rightarrow)$

لنبرهن أن A^c مفتوحة، لتكن $x \in A^c$ ولنبرهن وجود قرص مفتوح مركزه x ومحتوى في A^c

$$x \in A^c \Rightarrow x \notin A' \quad (A' \subset A \text{ لأن})$$

$$\Rightarrow \exists r > 0 : D_x(r) \cap (A \setminus \{x\}) = \phi$$

$$\Rightarrow \exists r > 0 : D_x(r) \cap A = \phi$$

$$\Rightarrow \exists r > 0 : D_x(r) \subset A^c \quad (\forall x \in A^c)$$

وبالتالي A^c مفتوحة ومنه تكون A مغلقة

تذكرة: لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ عندئذٍ:

$(f$ مستمر عند $a \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrow ($من أجل كل مجال مفتوح مركزه $f(a)$ مثل $I =]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$ يوجد مجال مفتوح $I' =]a-\delta, a+\delta[$ بحيث $f(I') \subset I$

تعريف (التابع المستمر على $\mathbb{R}^2$)

ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ، نقول إن f مستمر عند $p\in\mathbb{R}^2$ $\Longleftrightarrow$

(من أجل كل قرص مفتوح $D_{f(p)}(r)$ يوجد قرص مفتوح $D_p(r')$ بحيث:

$$f\left(D_p(r')\right)\subset D_{f(p)}(r)$$

تمرين أثبت أنه تكون المجموعة $A\subset\mathbb{R}^2$ مفتوحة إذا وفقط إذا كانت اجتماعاً لأقراص مفتوحة.

<u>ملاحظة</u> إذا كانت المجموعة A الموضحة بالرسم عندئذٍ كيف نُرسم على اجتماع أقراص؟!

من أجل كل نقطة ولتكن p مثلاً نأخذ بعدها عن الأضلاع الأربعة ونأخذ أصغر بُعد وليكن r_p عندئذٍ نأخذ القرص $D_p(r_p)\subset A$ ومنه سيكون $A=\bigcup D_p(r_p)$

مبرهنة: ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ تابع ما، عندئذٍ:

f مستمر على $\mathbb{R}^2$ إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في المستقر $\mathbb{R}^2$ هي مجموعة مفتوحة في المنطلق $\mathbb{R}^2$.

الإثبات مطلوب ويُترك كتمرين

تمرين أثبت أنه من أجل كل $A\subset\mathbb{R}^2$ ، $x\in\mathbb{R}^2$ ما الشروط التالية متكافئة

$\boxed{1}$ $x\in A'$

$\boxed{2}$ كل مجموعة مفتوحة تحوي x تتقاطع بنقطة واحدة على الأقل مع $A\setminus\{x\}$

$\boxed{3}$ كل مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^2$ وتحوي x تتقاطع مع $A\setminus\{x\}$ ، A و بعدد لا نهائي من النقاط

نتائج: بفرض $A, B \subset \mathbb{R}^2$ عندئذ:

(1) A' مغلقة في $\mathbb{R}^2$.

الإثبات: يكفي إثبات أنّ $(A')' \subset A'$ وحسب مبرهنة تكون عندئذ A' مغلقة

حسب التمرين السابق

$$x \in (A')' \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{كل مجموعة تحوي } x \text{ متقاطع مع } A' \setminus \{x\} \\ \text{بنقطة واحدة على الأقل مثل} \\ y \in A' \end{array} \right)$$

لتكن B أي مجموعة مفتوحة تحوي x ولنبرهن أنّ B ستتقاطع مع $A \setminus \{x\}$ فتكون $x \in A'$ وبالتالي $(A')' \subset A'$.

$x \in B$ و $x \in (A')'$ و B مفتوحة ومنه (حسب التمرين السابق)

$B \cap A' \setminus \{x\} \neq \emptyset$

$y \in A'$ و B مجموعة مفتوحة تحوي y وبالتالي:

$$B \cap (\underbrace{A \setminus \{y\}}_{A \text{ أو}}) \Longrightarrow x \in A' \Rightarrow (A')' \subset A'$$ "مجموعة غير منتهية"

(2) A° مفتوحة في $\mathbb{R}^2$:

ليكن $x \in A^\circ$ ولنبرهن أنه يوجد $r > 0$ بحيث

$D_x(r) \subset A^\circ$

بما أنّ $x \in A^\circ$ فيوجد $r > 0$ بحيث

$D_x(r) \subset A$

لنبرهن أنه من أجل كل $y \in D_x(r)$ يوجد $0 < r'$ بحيث

$$D_y(r') \subset D_x(r) \subset A \Longrightarrow y \in A^\circ$$
$$\Longrightarrow D_x(r) \subset A^\circ$$

نختار $r' = r - (\text{المسافة بين } x \text{ و } y)$ $\{r$ طرح وقيمة $|x-y|\}$

(3)

يترك تمرين

$$A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$$
$$A \subset B \Rightarrow A^{\circ} \subset B^{\circ}$$
$$(A \cup B)' \Rightarrow A' \cup B'$$

(4) $A' \cup A$ مغلقة في $\mathbb{R}^2$:

الإثبات: $(A')' \subset A'$ حسب (3)

$$(A' \cup A)' = (A')' \cup A' \subset A' \cup A' = A' \subset A' \cup A$$

$\Rightarrow$ $A' \cup A$ مغلقة (لأن $(A' \cup A)' \subset A' \cup A$)

(5) $A' \cup A$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي A

الإثبات لتكن B أي مجموعة مغلقة تحوي A

$$A \subset B \Rightarrow A' \subset B' \subset B$$

حسب (3) ، لأن B مغلقة

$\Rightarrow A \cup A' \subset B$ (كل مغلقة مثل B تحوي A ستحوي $A' \cup A$)

(6) A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A

الإثبات لتكن $B \subset A$ مفتوحة وبالتالي :

$$B = B^{\circ} \subset A^{\circ}$$

لأن B مفتوحة ، حسب (3)

نتيجة $\boxed{1}$ $A' \cup A$ هي تقاطع جميع المجموعات المغلقة التي تحوي A (ص 5)

$\boxed{2}$ A° هي اجتماع كل المجموعات المفتوحة في A.

تمرين لتكن $A \subset \mathbb{R}$ ومحدودة والمطلوب،

1) أثبت أن

$$\sup(A), \inf(A) \in A'$$

2) استنتج أنه إذا كانت مغلقة ومحدودة في $\mathbb{R}$ فإن

$$\sup(A), \inf(A) \in A$$

انتهت المحاضرة الخامسة