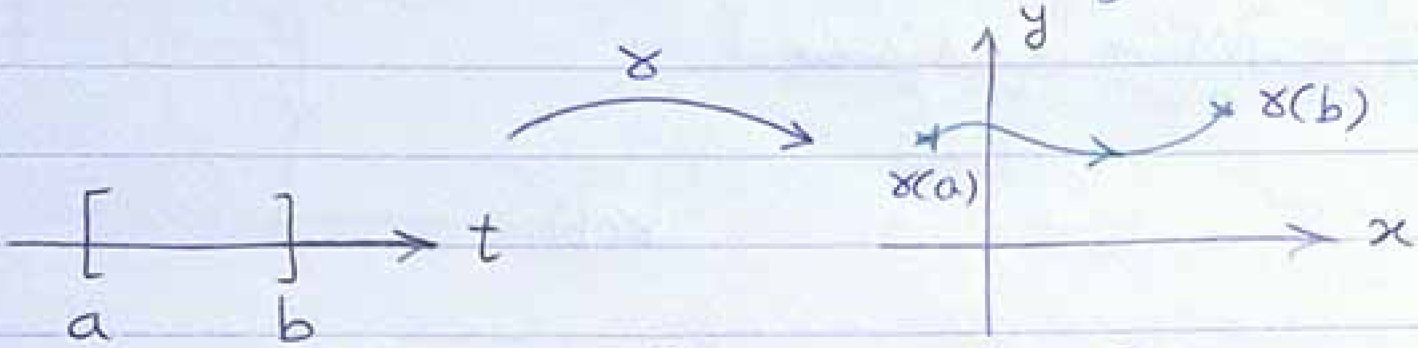
تعريف المنحني العقدي في المستوي العقدي:

هو كل تابع عقدي مستمر بمتحول حقيقي من الشكل:

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$$



نسمي t الوسيط وبالتالي المنحني العقدي يتعين بتابعين حقيقيين $x(t)$ و $y(t)$ كما نرمز للمنحني بـ γ أو C أو .....

- نقول أن المنحني γ يمر بالنقطة z_0 من المستوي العقدي إذا وجد t_0 من $[a,b]$ بحيث:

$$z_0 = \gamma(t_0) = x(t_0) + i\,y(t_0)$$

نسمي $\gamma(a)$ بداية المنحني و $\gamma(b)$ نهاية المنحني وبالتالي يمكن توجيه أي منحني عقدي وفق تزايد قيم الوسيط t.

- نقول عن المنحني γ أنه مغلق إذا انطبقت نهايته على بدايته أي إذا كان $\gamma(b)=\gamma(a)$
- نقول عن المنحني γ أنه بسيط إذا كان γ متباين أي:

عكس الشرط هو شرط التطبيق

$$\forall t_1, t_2 \in [a,b] \;;\; \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$$

ملاحظة: يكون المنحني المغلق بسيط إذا كان متباين على $[a,b[$

- نقول عن المنحني γ أنه من الصف C^1 إذا كان γ قابل للاشتقاق ومشتقة مس
- نقول عن المنحني γ أنه من الصف C^1 قطعياً إذا وجدت تجزئة منتهية للمجال $[a,b]$ من الشكل:

$$a = t_0 < t_1 < \dots\dots < t_n = b$$

بحيث يكون γ من الصف C^1 على المجالات الجزئية:

$$[t_i, t_{i+1}] \;;\; i = 0, 1, \dots, n-1$$

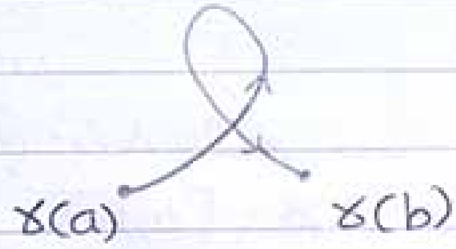
و النهايات:

$$\lim_{t \xrightarrow{>} t_i} \gamma(t) \;,\; \lim_{t \xrightarrow{<} t_i} \gamma(t) \;;\; i = 0, 1, \dots, n$$

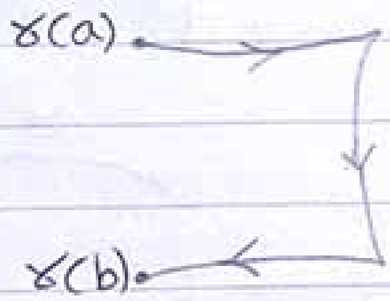
موجودة و محدودة.

قطعياً و لكن المماس غير صحيح ← C^1
قابلة للاشتقاق و مشتق مستمر C^1

مثال :



منحني غير بسيط من الصنف C^1



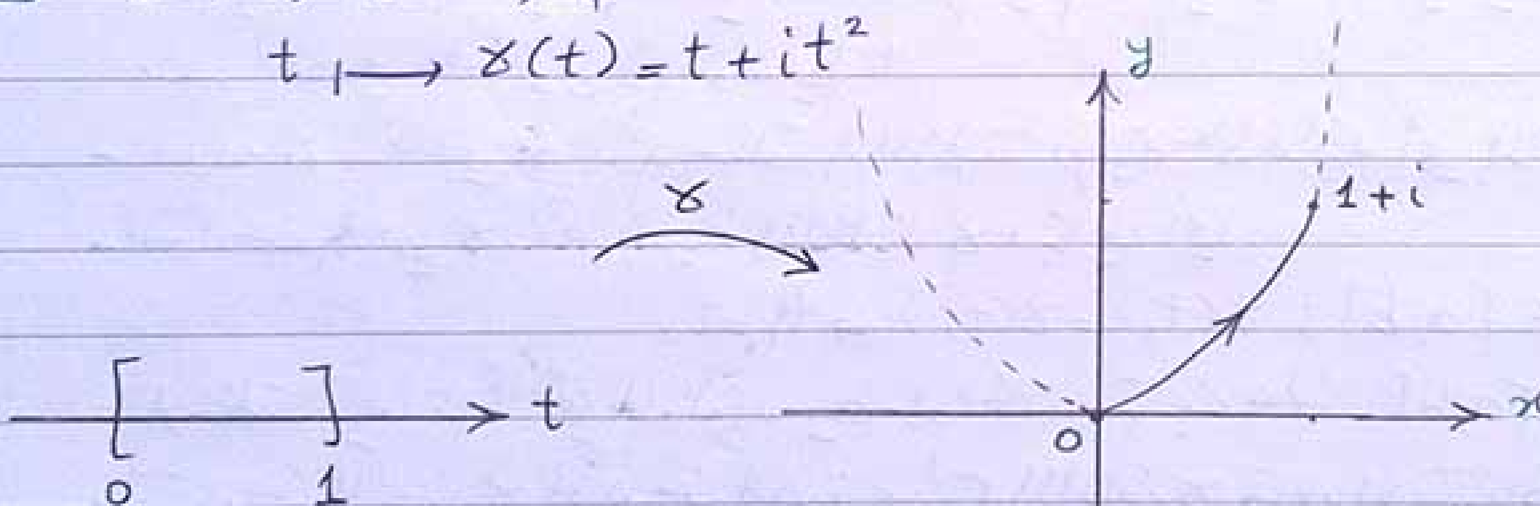
منحني بسيط من الصنف C^1 قطعياً

- نقول عن المنحني γ أنّه طريق إذا كان بسيط و من الصنف C^1 قطعياً
- نقول عن المنحني γ أنّه أملس إذا كان بسيط و من الصنف C^1 .

تمرين : مثّل المنحنيات التالية في المستوي العقدي :

$\boxed{1}$ $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto \gamma(t) = t + i t^2$



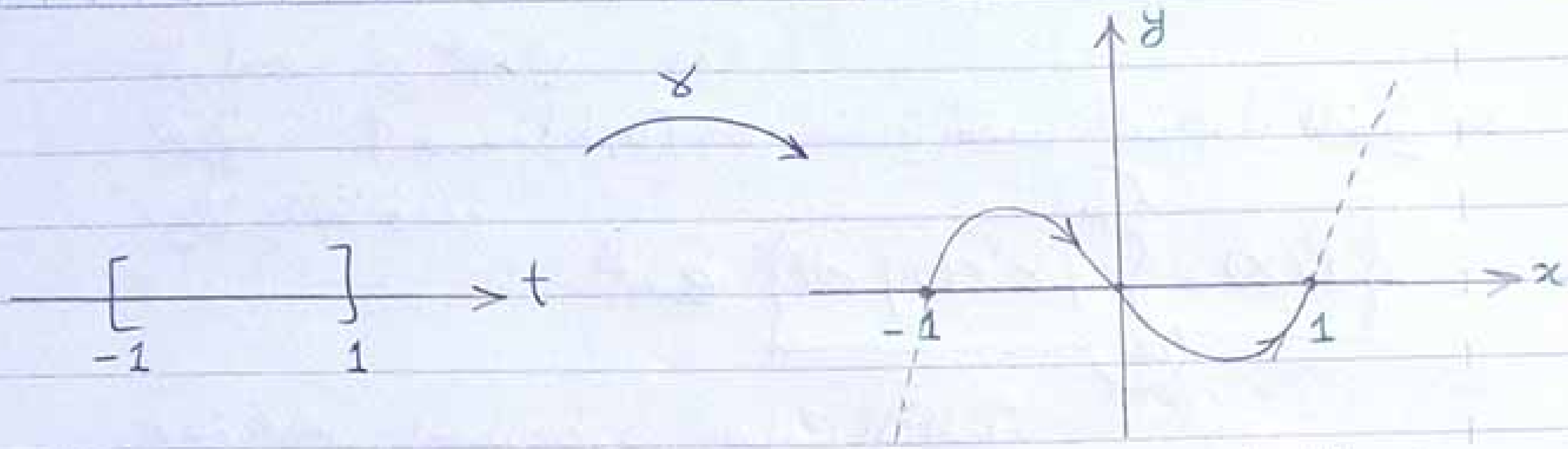
$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 \, ; \, x \in [0, 1]$$

وهو منحني أملس بدايته 0 ونهايته $1+i$

$\boxed{2}$ $\gamma : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto \gamma(t) = t + i (t^3 - t)$

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^3 - t \end{cases} \Rightarrow \gamma : y = x^3 - x \, ; \, x \, [-1, 1]$$



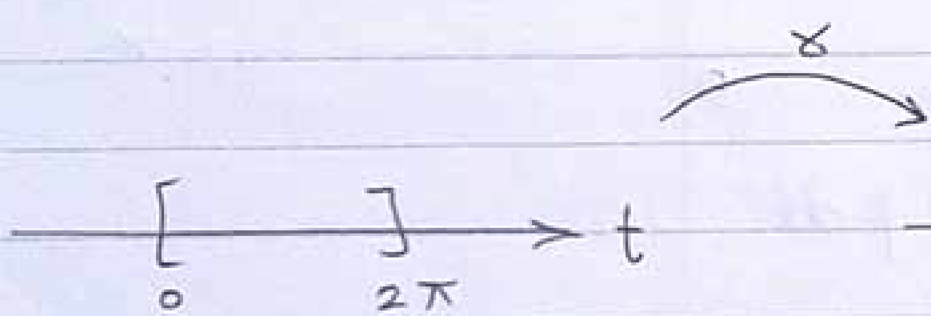
وهو منحني أملس بدايته $-1+0i$ ونهايته $1+0i$

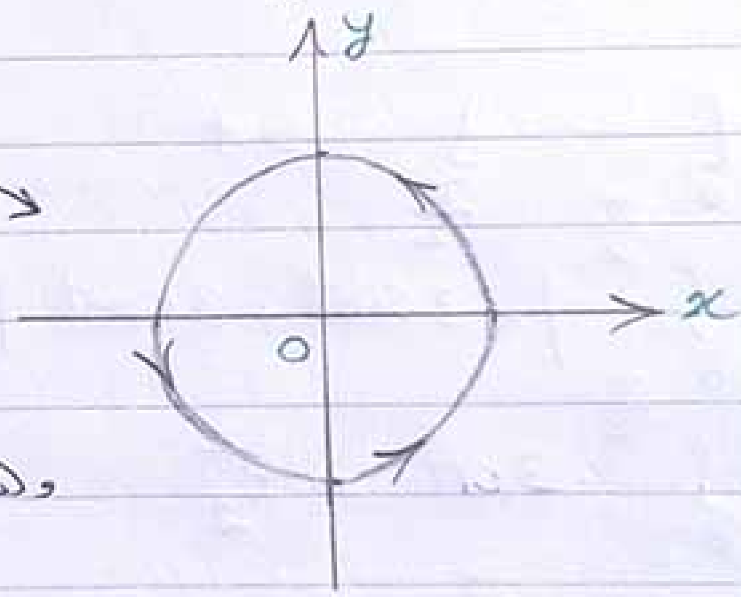
$\boxed{3}$ $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t \longmapsto \gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\Rightarrow \gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow \gamma : x^2 + y^2 = 1 \ ; \ x = [-1, 1]$$

$$y = [-1, 1]$$

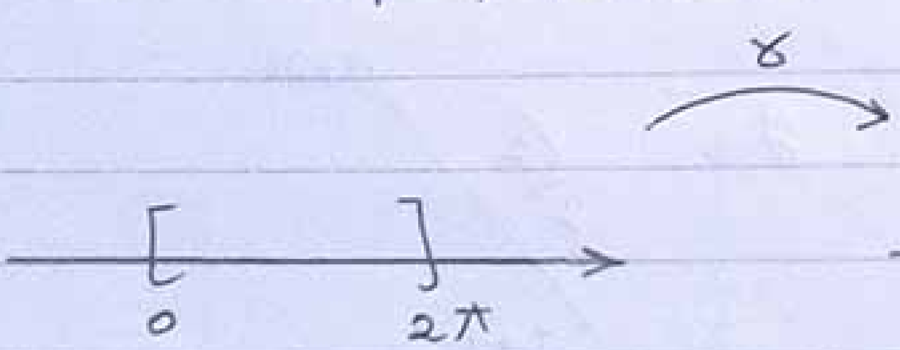


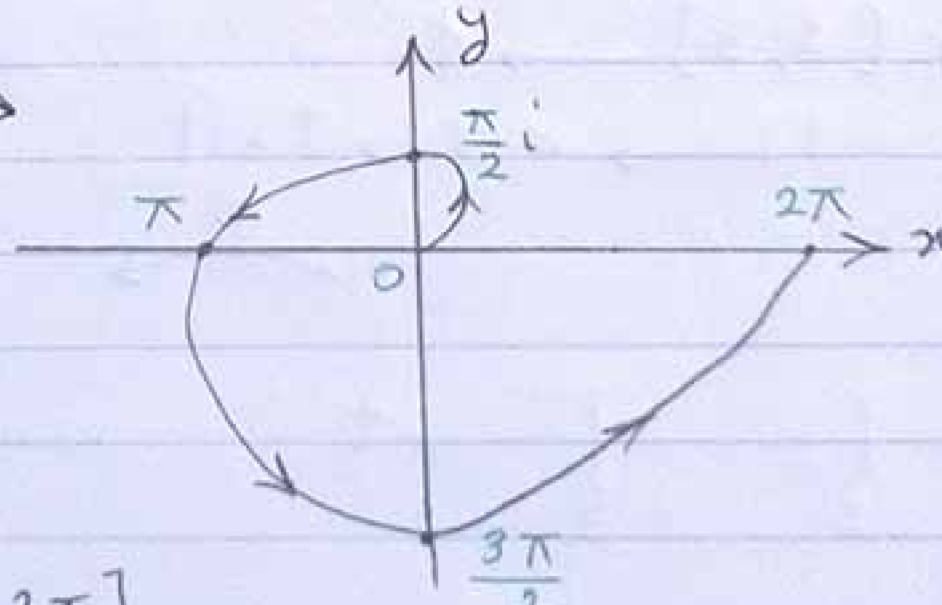


وهو منحني أملس مغلق.

$\boxed{4}$ $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t \longmapsto \gamma(t) = te^{it} = t\cos t + it\sin t$$





$$\gamma : \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases} \ ; \ t \in [0, 2\pi]$$

طول منحني عقدي:

نفرض $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ منحني أملس، إن طول المنحني γ يعطى بالقانون:

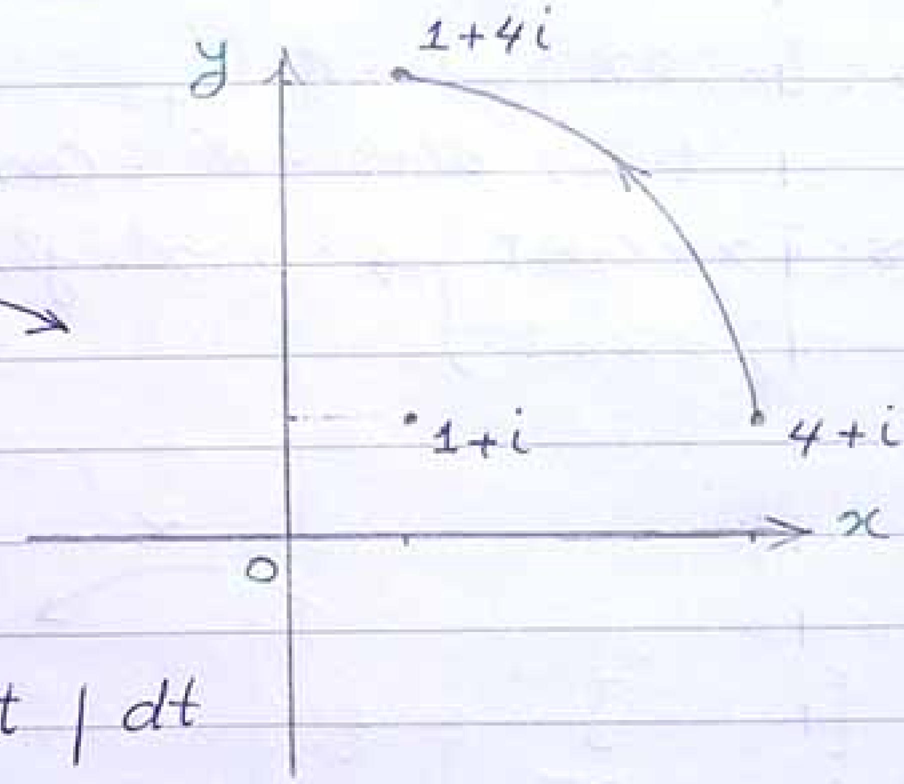
$$\boxed{\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt}$$ للحفظ

تمرين تعليمي: احسب طول المنحنيات التالية:

$\boxed{1}$ $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto \gamma(t) = 3e^{it} + i + 1$

$$\gamma = \begin{cases} x = 3\cos t + 1 \\ y = 3\sin t + 1 \end{cases}$$



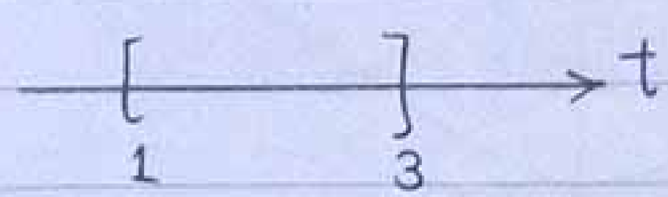
$$\ell(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |-3\sin t + 3\cos t|\, dt$$

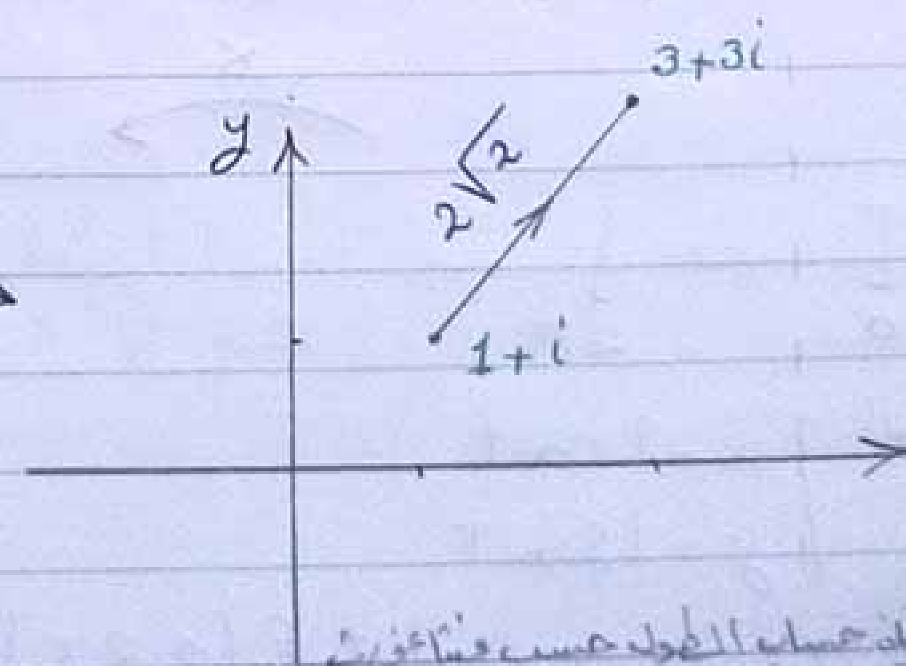
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\, dt = \frac{3\pi}{2}$$

ملاحظة: يمكن الاستنتاج بأن نأخذ ربع محيط الدائرة.

$\boxed{2}$ $\gamma : [1, 3] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto \gamma(t) = t + it$





$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \gamma : y = x \,;\, x \in [1,3]$$

نهتم بنقطة البداية ونقطة النهاية والتوجيه:

$$l(\gamma) = \int_1^3 |1+i|\, dt = \int_1^3 \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}$$

وظيفة: مثّل المنحنيات المعرّفة التالية في المستوي العقدي واحسب طوله:

$$\gamma_1 : \gamma_1(t) = \cos t + i \sin t \,;\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\gamma_2 : \gamma_2(t) = \cos^2 t + i \sin^2 t \,;\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\gamma_3 : \gamma_3(t) = \cos^3 t + i \sin^3 t \,;\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$