قسم الرياضيات

السنة الرابعة جبر

5

نظرية الشبكات

مكتبة ميموزين

Mimozeyn

الفصل الدراسي الثاني

E- Mail: Mimozeyn@yahoo.com

17 /3 /2013-2014

حل تمارين المحاضرة الثانية

* التمرين الأول :

لتكن p,q قضيتين ما، والمطلوب :

أ- في أية حالة تكون القضية $(\sim p \Rightarrow p)$ صحيحة ؟

<u>الحل</u> : نميز حالتين :

أ) القضية p صحيحة عندئذٍ القضية $\sim p$ خاطئة ومنه فإن الاقتضاء $(\sim p \Rightarrow p)$ صحيح

(لأن $0 \to 1$ صحيحة، حيث الخطأ ممكن أن يعطي صح (الخطأ قد يعطي أي شيء، صح أو خطأ))

ب) القضية p خاطئة عندئذٍ $\sim p$ صحيحة ومنه فالاقتضاء $(\sim p \Rightarrow p)$ خاطئ

(لا يمكن للصح أن يعطي خطأ ؛ $1 \to 0$ ×)

إذاً : فالقضية $(\sim p \Rightarrow p)$ صحيحة عندما تكون p صحيحة .

ب- في أية حالة تكون القضية $(\sim(\sim p) \Rightarrow p)$ خاطئة؟

<u>الحل</u> : هذه القضية صحيحة دائماً (أي أنها استدلال) وذلك لأن :

• بفرض p خاطئة عندئذٍ $\sim p$ صحيحة ومنه $\sim(\sim p)$ خاطئة وبالتالي فإن الاقتضاء $(\sim(\sim p) \Rightarrow p)$ صحيح ($0 \to 0$ ✓ الخطأ يمكنه أن يعطي خطأ)

• بفرض p صحيحة عندئذٍ $\sim p$ خاطئة ومنه $\sim(\sim p)$ صحيحة وبالتالي فالاقتضاء $(\sim(\sim p) \Rightarrow p)$ صحيح ($1 \to 1$ ✓ الصح يعطي صح)

إذاً : القضية $(\sim(\sim p) \Rightarrow p)$ لا يمكن أن تكون خاطئة .

٣- إذا كانت القضية $(p \Rightarrow q)$ صحيحة فهل القضية $(\sim p \Rightarrow \sim q)$ صحيحة ولماذا؟

الحل: كلا ليست صحيحة دائماً لأنه:

يكفي أخذ قضية p خاطئة و q صحيحة وعنده فإن $(p \Rightarrow q)$ صحيحة

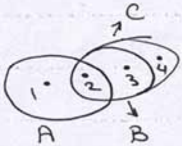
ولكن عندها $\sim p$ صحيحة و $\sim q$ خاطئة والقضية $(\sim p \Rightarrow \sim q)$ خاطئة.

---

* التمرين الثاني:

• أثبت بمثال أنه إذا كان: $A \cap B = A \cap C$ فليس من الضروري أن يكون $B = C$

الحل: لتكن $A, B, C \subseteq \Omega$ مجموعات مأخوذة من المجموعة الشاملة نسبياً



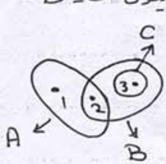
$A = \{1,2\}\ ,\ B = \{2,3\}\ ,\ C = \{2,3,4\}$

نلاحظ أن: $A \cap B = \{2\} = A \cap C$

ولكن $B \neq C$ (إذاً لا يمكن اختزال A)

• أثبت بمثال أنه إذا كان $A \cup B = A \cup C$ فليس من الضروري أن يكون $B = C$

الحل: لتكن $A, B, C \subseteq \Omega$ ثلاث مجموعات من المجموعة الشاملة نسبياً



$A = \{1,2\}\ ,\ B = \{2,3\}\ ,\ C = \{3\}$

نلاحظ أن: $A \cup B = \{1,2,3\} = A \cup C$

ولكن $B \neq C$

---

* التمرين الثالث:

أثبت أن التقاطع توزيعي على الفرق التناظري أي أن:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

الحل:

طريقة أولى : عن طريق جدول الحقيقة .

طريقة ثانية : باستخدام جبر القضايا :

$$\ell_2=(A\cap B)\Delta(A\cap C)=[(A\cap B)-(A\cap C)]\cup[(A\cap C)-(A\cap B)]$$

$$=[(A\cap B)\cap(A\cap C)']\cup[(A\cap C)\cap(A\cap B)']$$

دومورغان

$$=[(A\cap B)\cap(A'\cup C')]\cup[(A\cap C)\cap(A'\cup B')]$$

التقاطع توزيعي على الاجتماع

$$=[(\underline{A}\cap B\cap\underline{A'})\cup(A\cap B\cap C')]\cup[(\underline{A}\cap C\cap\underline{A'})\cup(A\cap C\cap B')]$$

بالاستفادة من كون التقاطع تجميعي

$$=[\phi\cup(A\cap B\cap C')]\cup[\phi\cup(A\cap C\cap B')]$$

$$=(\underset{\sim}{A}\cap B\cap C')\cup(\underset{\sim}{A}\cap C\cap B')$$

التقاطع توزيعي على الاجتماع

$$=A\cap((B\cap C')\cup(C\cap B'))$$

$$=A\cap((B-C)\cup(C-B))$$

$$=A\cap(B\Delta C)=\ell_1$$

(أو يمكننا التوقف عند السادس $\ell_2=(A\cap B\cap C')\cup(A\cap C\cap B')$

ثم ندرس ℓ_1 ونفكه إلى أن نصل إلى $\ell_1=(A\cap B\cap C')\cup(A\cap C\cap B')$)

* ثم أثبت أن الاجتماع ليس توزيعي على الفرق التناظري ، أي أن المساواة التالية غير صحيحة :

$$A\cup(B\Delta C)=(A\cup B)\Delta(A\cup C)$$

<u>الحل :</u>

بأخذ $A=\{1,2\}, B=\{2,3\}, C=\{3\}$

نجد :

$$\ell_1=A\cup(B\Delta C)=A\cup[(B-C)\cup(C-B)]$$

$$=\{1,2\}\cup[\{2\}\cup\phi]=\{1,2\}$$

$$\ell_2=(A\cup B)\Delta(A\cup C)=[(A\cup B)-(A\cup C)]\cup[(A\cup C)-(A\cup B)]$$

$$=[\{1,2,3\}-\{1,2,3\}]\cup[\{1,2,3\}-\{1,2,3\}]$$

$$=\phi\cup\phi=\phi$$

<u>إذاً $\ell_1\neq\ell_2$ ومنه المساواة المدروسة غير صحيحة.</u>

ملاحظة: عندما نتكلم عن عنصر ما x فإن $x\in\Omega$ ينتمي إلى المجموعة الشاملة نسبياً التي هي موجودة ولو بشكل مستتر، لكن لا داعي لذكر $x\in\Omega$ ما لم نسأل من أين هي x.

* التمرين الرابع:

أثبت أن:
$$\left(\bigcup_k A_k\right)-\left(\bigcup_k B_k\right)\subseteq \bigcup_k (A_k - B_k)$$
ثم اضرب مثالاً عن أن المساواة ليس بالضرورة أن تكون صحيحة دوماً.

الحل:

ليكن $x\in\left(\bigcup_k A_k\right)-\left(\bigcup_k B_k\right)$ عندئذٍ فإن $x\in\bigcup_k A_k \wedge x\notin\bigcup_k B_k$

ومنه فإنه: $(\exists k_0 ; x\in A_{k_0}) \wedge (\forall k ; x\notin B_k)$

طالما لم نذكر مجموعة الأدلة فلا داعي لكتابة $\exists k_0\in I$

وبالتالي:
$$\exists k_0 ;\quad (x\in A_{k_0}) \wedge (x\notin B_{k_0})$$
ومنه:
$$\exists k_0 ;\quad x\in (A_{k_0}-B_{k_0})$$
ومنه:
$$x\in \bigcup_k (A_k - B_k)$$
إذاً:
$$\left(\bigcup_k A_k\right)-\left(\bigcup_k B_k\right)\subseteq \bigcup_k (A_k - B_k)$$

• الإثبات على عدم صحة العكس:

سنأخذ K مجموعة من الأدلة تحوي ثلاثة عناصر

$$A_1=\{1,2,3\},\ A_2=\{1,2\},\ A_3=\{3\},\quad B_1=\{3\},\ B_2=\{2,3\},\ B_3=\{2\}$$

وسنثبت أن:
$$\left(\bigcup_{k=1}^{3} A_k\right)-\left(\bigcup_{k=1}^{3} B_k\right)\neq \bigcup_{k=1}^{3} (A_k - B_k)$$
$$\{1,2,3\}-\{2,3\}\overset{?}{=}\left(\overset{A_1-B_1}{\{1,2\}}\cup\overset{A_2-B_2}{\{1\}}\cup\overset{A_3-B_3}{\{3\}}\right)$$
$$\{1\}\neq\{1,2,3\}$$

(بقية التمارين لمحاضرة لاحقة)

* مبرهنة (١) :

لتكن $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$ ولنفرض أن $A_1 \sim A$ عندئذٍ تكون $A_2 \sim A$ وتكون المجموعات الثلاثة متكافئة.

الإثبات :

نلاحظ أن $A_2 \subseteq A$ وبالتالي فإن $card(A_2) \leq card(A)$ $(*)$

(وذلك لوجود التطبيق المتباين : $j_{A^2} : A^2 \longrightarrow A$ التباين القانوني)

وأيضاً أن $A \sim A_1 \subseteq A_2$ ومنه : $card(A) = card(A_1) \leq card(A_2)$ $(*')$

(من الفرض $A_1 \sim A$ وحيث علاقة التكافؤ تناظرية فإن $A \sim A_1$)

إذاً من $(*)$ و $(*')$ وحسب مبرهنة كانتور - برنشتاين فإن :

$card(A_2) = card(A)$ ومنه فإن $A_2 \sim A$

وبالتالي المجموعات الثلاثة متكافئة.

* مبرهنة (٢) :

الجداء الديكارتي لمجموعتين قابلتين للعد يكون مجموعة "قابلة" للعد.

الإثبات :

لتكن A, B مجموعتين قابلتين للعد، عندئذٍ $A \sim \mathbb{N}$ و $B \sim \mathbb{N}$

(أو $A \sim \mathbb{N}^*$ كلاهما صحيح حيث $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^*$ كما أثبتنا سابقاً)

ومنه يوجد التقابلان : $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ و $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{N}$

ومنه يوجد التقابل : $\psi : A \times B \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(a, b) \longmapsto (f(a), \varphi(b))$ عنصر أول

$(\alpha, \beta) \longmapsto (f(\alpha), \varphi(\beta))$ عنصر ثاني

ψ تطبيق ومتباين لأن : لأن f و φ تطبيقان متباينان

$(a, b) = (\alpha, \beta) \Leftrightarrow a = \alpha \wedge b = \beta \Leftrightarrow f(a) = f(\alpha) \wedge \varphi(b) = \varphi(\beta)$

$\Leftrightarrow (f(a), \varphi(b)) = (f(\alpha), \varphi(\beta)) \Leftrightarrow \psi(a, b) = \psi(\alpha, \beta)$

كما أن ψ غامر لأنه :

$$(m,n)\in N\times N \xrightarrow[\text{غامران}]{\varphi,f} \exists a_0\in A ; f(a_0)=m \wedge \exists b_0\in B ; \varphi(b_0)=n$$

$$\Rightarrow (f(a_0),\varphi(b_0))=(m,n)$$

$$\Rightarrow \psi(a_0,b_0)=(m,n)$$

$$\Rightarrow \exists (a_0,b_0)\in A\times B ; \psi(a_0,b_0)=(m,n)$$

مما سبق فإن ψ تقابل.

وبالتالي $Card(A\times B)=card(N\times N)$ ومنه $A\times B\sim N\times N$

* كي يتم المطلوب سنبرهن الآن أن $N\times N$ وذلك كما يلي :

$$N\times N=\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \quad ; \quad H_i=\{(i,n) \; ; \; n\in N\}$$

أو نكتب : $N\times N=\bigcup_{i\in N} H_i$ (لو أخذنا $N^*\times N^*$ لكان $\bigcup_{1}^{\infty} H_i \; ; \; H_i=\{(i,n);n\in N^*\}$)

عندئذٍ :

H_i مجموعة قابلة للعد (لأن $Card H_i = card N$ = عدد العناصر (i,n) حيث $n\in N$)

كما أن $\bigcup_{i\in N} H_i$ هي أسرة مجموعات ، مجموعة أدلتها N قابلة للعد

واجتماع قابل للعد لأسرة من المجموعات القابلة للعد يكون قابلاً للعد

إذاً $\bigcup_{i\in N} H_i$ قابلة للعد ومنه $N\times N$ قابلة للعد وبالتالي فإن $A\times B$ كذلك.

نتيجة :

- اجتماع أسرة مجموعات كل منها قابلة للعد بحيث مجموعة أدلة الأسرة قابلة للعد يكون قابلاً للعد.
- الجداء الديكارتي لمجموعتين قابلتين للعد هو مجموعة قابلة للعد
- قدرة الجداء الديكارتي لأي مجموعتين يساوي جداء قدرتي المجموعتين

$$Card(A\times B)=Card(A)\times Card(B)$$

- إن $\aleph_0=\aleph_0\times\aleph_0$ والإثبات على ذلك بأخذ مجموعتين قابلتين للعد فيكون جداؤهما الديكارتي

قابلة للعد أي أن قدرته تساوي $\aleph_0$ (١)

وحيث قدرة الجداء الديكارتي لمجموعتين تساوي جداء قدرتيهما، وحيث كل من المجموعتين قابلة للعد

إذاً قدرة كل منهما $\aleph_0$ وبالتالي تصبح قدرة الجداء الديكارتي لهما تساوي $\aleph_0 \times \aleph_0$ (٢)

إذاً: نستنتج أن $\aleph_0 = \aleph_0 \times \aleph_0$ (من (١) و (٢))

- مجموع قدرتي مجموعتين تساوي قدرة اجتماعهما إذا كانت المجموعتان منفصلتان

تمهيد :

- إن $]-\infty,+\infty[\sim]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ وذلك لوجود التقابل :

$$]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\longrightarrow]-\infty,+\infty[$$
$$x \longmapsto tg\, x$$

- $]0,1[\sim]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ (كل مجالين متكافئين)
- إذاً المجالات الثلاثة متكافئة $]0,1[\sim]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\sim]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$

ومنه $]0,1[$ غير قابل للعد (وسنثبت ذلك عن طريق مبرهنة في المحاضرة القادمة، مع ملاحظة أن $]0,1] \sim [0,1] \sim]0,1[$)

- كل كسر عشري منتهي يمكن كتابته بشكل غير منتهٍ :

(إما عن طريق الأصفار $1.53 = 1.530000\ldots$

أو عن طريق التسعات والتي سنستخدمها لأنها مفيدة أكثر من الأصفار)

إن $0.99999\ldots = 1$ والإثبات كما يلي :

$$0.9999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

متسلسلة هندسية حدها الأول $\frac{9}{10}$ وأساسها $\frac{1}{10}$ إذاً هي متقاربة ومجموعها

$$S = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

ومنه $0.9999\ldots = 1$

إذاً: $\frac{1}{2} = 0.5 = 0.499999\ldots$

انتهت المحاضرة